Н. БУРБАКИ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ

N. BOURBAKI FASCICULE II

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PREMIÈRE PARTIE

LIVRE III

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

CHAPITRE 1

STRUCTURES TOPOLOGIQUES

CHAPITRE 2

STRUCTURES UNIFORMES

TROISIÈME ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE

HERMANN

115, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS VI

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
С. Н. КРАЧКОВСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Д. А. РАЙКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

51+515.2
517.6
Б 91
УДК 513.83

Н. Бурбаки

Общая топология.
Основные структуры

М., 1968 г., 272 стр. с илл.

Редактор *С. А. Широкова*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *М. Ф. Алексеева*

Сдано в набор 25/IX 1967 г. Подписано к печати 20/VI 1968 г. Бумага 60×90¹/₁₆
Физ. печ. л. 17+2 вкл. Условн. печ. л. 17,25. Уч.-изд. л. 16,42. Тираж 30 000 экз.
Цена книги 1 р. 43 к. Заказ № 2034.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Отпечатано с матриц во 2-ой типографии Издательства «Наука»
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

2-2-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию 9

Введение 11

Глава I. **Топологические структуры** 17

§ 1. Открытые множества; окрестности; замкнутые множества . . . 17
1. Открытые множества 17
2. Окрестности 19
3. Фундаментальные системы окрестностей; базисы топологии 21
4. Замкнутые множества 23
5. Локально конечные семейства 23
6. Внутренность, замыкание, граница множества; всюду плотные множества 24
Упражнения 27

§ 2. Непрерывные функции 30
1. Непрерывные функции 30
2. Сравнение топологий 33
3. Инициальные топологии 35
4. Финальные топологии 38
5. Склеивание топологических пространств 40
Упражнения 42

§ 3. Подпространства; факторпространства 45
1. Подпространства топологического пространства 45
2. Непрерывность относительно подпространства 48
3. Локально замкнутые подпространства 49
4. Факторпространства 50
5. Каноническое разложение непрерывного отображения . . . 52
6. Факторпространство подпространства 54
Упражнения 55

§ 4. Произведение топологических пространств 58
1. Произведение пространств 58
2. Срез открытого множества; срез замкнутого множества; проекция открытого множества. Частичная непрерывность . . 61
3. Замыкание в произведении 62
4. Проективные пределы топологических пространств 63
Упражнения 66

§ 5. Открытые и замкнутые отображения 68
1. Открытые и замкнутые отображения 68
2. Открытые и замкнутые отношения эквивалентности 70
3. Специальные свойства открытых отображений 73
4. Специальные свойства замкнутых отображений 75
Упражнения 76
§ 6. Фильтры 78
1 Определение фильтра 78
2 Сравнение фильтров 79
3. Базисы фильтра 81
4. Ультрафильтры 82
5 Индуцированный фильтр 84
6. Образ и прообраз базиса фильтра 85
7 Произведение фильтров 87
8. Элементарные фильтры 88
9. Ростки относительно фильтра 89
10. Ростки в точке 92
Упражнения 93
§ 7. Пределы 97
1. Предел фильтра 97
2. Точка прикосновения базиса фильтра 98
3. Предел и предельная точка функции 99
4 Пределы и непрерывность 102
5 Пределы относительно подпространства 103
6 Пределы в произведениях пространств и факторпространствах 104
Упражнения 105
§ 8. Отделимые и регулярные пространства 106
1. Отделимые пространства 106
2. Подпространства и произведения отделимых пространств . . 109
3 Отделимость факторпространства 111
4. Регулярные пространства 112
5. Продолжение по непрерывности. Двойной предел 114
6. Отношения эквивалентности в регулярном пространстве . . 115
Упражнения 116
§ 9. Компактные и локально компактные пространства 124
1 Квазикомпактные и компактные пространства 124
2. Регулярность компактного пространства 127
3 Квазикомпактные, компактные и относительно компактные множества 128
4. Образ компактного пространства при непрерывном отображении 130
5. Произведение компактных пространств 131
6. Проективные пределы компактных пространств 132
7. Локально компактные пространства 133

8 Погружение локально компактного пространства в компактное пространство 136
9. Локально компактные пространства, счетные в бесконечности 138
10. Паракомпактные пространства 139
Упражнения 143
§ 10. Совершенные отображения 152
1. Совершенные отображения 152
2. Характеризация совершенных отображений свойствами компактности 156
3 Совершенные отображения в локально компактные пространства 160
4 Факторпространства компактных и локально компактных пространств 161
Упражнения 164
§ 11. Связность 169
1. Связные пространства и множества 169
2. Образ связного множества при непрерывном отображении . . 171
3. Факторпространства связного пространства 172
4 Произведение связных пространств 173
5 Связные компоненты 173
6. Локально связные пространства 175
7. Применение: теорема Пуанкаре — Вольтерра 177
Упражнения 181

Приложение. Дополнения о проективных пределах множеств 189

1. Проективные системы подмножеств 189
2. Критерий непустоты проективного предела 190

Исторический очерк к главе I 194

Библиография 199

Глава II. **Равномерные структуры** 201

§ 1. Равномерные пространства 201
1. Определение равномерной структуры 201
2. Топология равномерного пространства 204
Упражнения 208
§ 2. Равномерно непрерывные функции 209
1. Равномерно непрерывные функции 209
2. Сравнение равномерных структур 210
3. Инициальные равномерные структуры 211
4. Прообраз равномерной структуры. Равномерные подпространства 213
5. Верхняя грань множества равномерных структур 215
6. Произведение равномерных пространств 215
7. Проективные пределы равномерных пространств 217
Упражнения 218

§ 3. Полные пространства 220
1. Фильтры Коши 220
2. Минимальные фильтры Коши 222
3. Полные пространства 223
4. Подпространства полных пространств 226
5. Произведения и проективные пределы полных пространств . 226
6. Продолжение равномерно непрерывных функций 230
7. Пополнение равномерного пространства 232
8. Отделимое равномерное пространство, ассоциированное с равномерным пространством 237
9. Пополнение подпространств и произведений пространств . . . 239
Упражнения 241
§ 4. Связи между равномерными и компактными пространствами . . . 242
1. Равномерность компактных пространств 242
2. Компактность равномерных пространств 246
3. Компактные множества в равномерном пространстве 249
4. Связные множества в компактном пространстве 249
Упражнения 252

Исторический очерк к главе II 259

Библиография 261

Указатель обозначений 262

Указатель терминов 263

Таблица соответствия второго и третьего изданий 269

Определения и аксиомы главы I . . . . . Вклейка 1

Определения и аксиомы главы II . . . . . Вклейка 2

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В этом новом издании *) сделано довольно большое число изменений в деталях; кроме того, переделан весь план гл. I и II с целью расположить материал в лучшем соответствии с общими представлениями о морфизмах структур и универсальных отображениях (Теория множеств, гл. IV, §§ 2 и 3). Среди наиболее значительных добавлений отметим введение квазикомпактных пространств и проективных пределов, приложения которых к коммутативной алгебре и алгебраической геометрии становятся все более и более важными, а также большее развитие понятий открытого, замкнутого и совершенного отображений, которым посвящены два параграфа гл. I.

*) Перевод выполнен с третьего издания с учетом изменений, внесенных в четвертое.

ВВЕДЕНИЕ

Наряду с *алгебраическими* структурами (группами, кольцами, телами и т. д.), которые составляли предмет второй книги этого сочинения, во всех разделах анализа встречаются структуры другого рода: структуры, в которых придается математический смысл интуитивным понятиям *предела*, *непрерывности* и *окрестности*. Изучение этих структур и будет предметом настоящей книги.

Исторически понятия предела и непрерывности появились в математике весьма рано, а именно в геометрии, и с развитием анализа и его приложений к опытным наукам их роль неуклонно возрастала. И действительно, эти понятия тесно связаны с понятиями *опытного определения* и *приближения* величин. Но так как в большинстве случаев опытное определение величин сводится к *измерениям*, т. е. к нахождению одного или нескольких *чисел*, то вполне естественно, что в математике понятия предела и непрерывности появляются прежде всего в теории вещественных чисел с ее ответвлениями и различными областями применения (комплексные числа, вещественные или комплексные функции вещественных или комплексных переменных, евклидова геометрия и производные от нее геометрии).

В наше время стало ясно, что значение понятий, о которых идет речь, выходит далеко за пределы области вещественных и комплексных чисел классического анализа (см. Исторический очерк к гл. I). Путем углубленного исследования и разложения этих понятий удалось извлечь их суть и выковать орудие, действенность которого проявилась в многочисленных отраслях математики.

Уяснение того, в чем именно заключается главное содержание понятий предела, непрерывности и окрестности, мы начнем

с анализа понятия *окрестности*, хотя исторически оно более позднего происхождения, чем оба остальные. Если исходить из физического понимания приближения, то естественно сказать, что часть A множества E является окрестностью своего элемента a, если при замене последнего его «приближением» этот новый элемент также будет принадлежать A всякий раз, когда допущенная «ошибка» достаточно мала; другими словами, если каждый элемент из E, «достаточно близкий» к элементу a, принадлежит A. Это определение получает точный смысл, как только вложен точный смысл в понятие достаточно малой ошибки или элемента, достаточно близкого к данному. Для достижения этого самым естественным будет предположить, что «отклонение» одного элемента от другого можно измерить вещественным (положительным) числом. Всякий раз, когда для любой пары элементов некоторого множества определено их «отклонение» или «расстояние», оказывается возможным определить «окрестности» элемента a этого множества; а именно, окрестностью элемента a будет любое подмножество, содержащее все элементы, расстояние которых от a меньше надлежащего положительного числа. Понятно, что для того чтобы, исходя из этого определения, можно было развить содержательную теорию, следует предположить, что «расстояние» удовлетворяет некоторым условиям или аксиомам (например, что и для нашего обобщенного расстояния должны выполняться неравенства, которые в евклидовой геометрии имеют место для расстояний между вершинами треугольника). Так получается широкое обобщение евклидовой геометрии; при этом удобно пользоваться геометрическим языком и называть элементы множества, в котором определено «расстояние», *точками*, а само множество — *пространством*. Такого рода пространства изучаются в гл. IX.

В этой концепции еще не устранены вещественные числа. Однако так определенные пространства обладают большим числом свойств, которые можно сформулировать независимо от лежащего в их основе понятия расстояния. Например, каждое подмножество, содержащее окрестность точки a, также есть окрестность точки a; пересечение двух окрестностей точки a является окрестностью точки a. Эти и некоторые другие свойства влекут массу следствий, которые выводятся из них совершенно независимо от понятия

«расстояния», первоначально легшего в основу определения окрестностей. Так получаются предложения, в которых совсем нет речи о величине, расстоянии и т. п.

Это приводит в итоге к общей концепции топологического пространства, концепции, не зависящей от какой бы то ни было предваряющей ее теории вещественных чисел. Мы говорим, что множество E наделено *топологической структурой*, каждый раз, когда каждому его элементу тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из E, называемых *окрестностями* этого элемента, если только, конечно, эти окрестности удовлетворяют некоторым условиям (*аксиомам* топологических структур). Выбор налагаемых на окрестности аксиом, очевидно, до некоторой степени произволен, и исторически он был предметом продолжительных поисков (см. Исторический очерк к гл. I). Система аксиом, на которой, в конце концов, остановились, вполне отвечает потребностям современного анализа, не впадая при этом в чрезмерную и беспредметную общность.

Множество, наделенное топологической структурой, называют *топологическим пространством*, а элементы этого множества — *точками*. Ветвь математики, изучающая топологические структуры, носит название *топологии* (этимологически — «наука о положении», название само по себе мало выразительное), которое в наши дни предпочитается названию Analysis Situs, являющемуся его синонимом.

Следует отметить, что для того, чтобы прийти к понятию окрестности, мы исходили из расплывчатого понятия элемента, «достаточно близкого» к другому. Теперь, наоборот, понятие топологической структуры позволяет придать выражению «такое-то свойство имеет место для всех точек, *достаточно близких* к a» точный смысл; это означает по определению, что множество точек, обладающих этим свойством, является окрестностью точки a в данной топологической структуре.

Из понятия окрестности проистекает ряд других понятий, изучение которых составляет содержание топологии: внутренность множества, замыкание множества, граница множества, открытое множество, замкнутое множество и т. д. (см. гл. I, § 1). Например, A является *открытым* множеством, если всякий раз, когда точка a принадлежит A, все точки, достаточно близкие к a, также при-

надлежат A; иначе говоря, если A является окрестностью любой своей точки. Аксиомы окрестностей позволяют установить различные свойства всех этих понятий: например, пересечение двух открытых множеств является открытым множеством (потому что предположено, что пересечение двух окрестностей точки a также является ее окрестностью). Обратно, примем за отправной пункт вместо понятия окрестности одно из этих производных понятий, например, предположим известными открытые множества и возведем в аксиомы свойства семейства открытых множеств (одно из которых только что было упомянуто в качестве примера). Легко установить, что тогда от открытых множеств можно заново прийти к окрестностям, причем выполнение аксиом окрестностей будет являться следствием новых аксиом, взятых в качестве отправной точки. Таким образом, мы видим, что топологическая структура может быть определена многими, однако, по существу, равносильными способами. В этой книге мы исходим из понятия *открытого множества* по соображениям удобства, поскольку соответствующие аксиомы носят наиболее простой характер.

Как только топологические структуры определены, понятию *непрерывности* легко уже придать точный смысл. Интуитивно функция непрерывна в некоторой точке, если ее значение сколь угодно мало изменяется, покуда аргумент остается достаточно близким к рассматриваемой точке. Мы видим, что понятие непрерывности будет иметь точный смысл каждый раз, когда пространство аргументов и пространство значений функции будут топологическими пространствами. Напрашивающееся тогда точное определение будет дано в § 2 гл. I.

Как и в понятии непрерывности, в понятии *предела* участвуют два множества, наделенных соответствующей структурой, и отображение одного из этих множеств в другое. Например, когда речь идет о пределе последовательности a_n вещественных чисел, то здесь, с одной стороны, участвуют множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел, с другой,— множество $\mathbf{R}$ вещественных чисел и, наконец, отображение первого множества во второе. При этом говорят, что вещественное число a является пределом последовательности a_n, если, какова бы ни была окрестность V точки a, эта окрестность содержит числа a_n для всех значений n, за исключением конечного числа; другими словами, если множество тех n, для которых a_n

принадлежит V, составляет подмножество множества $\mathbf{N}$, имеющее конечное дополнение. Ясно, что, поскольку речь идет об окрестностях, $\mathbf{R}$ предполагается наделенным топологической структурой; что касается множества $\mathbf{N}$, то в нем играет особую роль некоторое семейство подмножеств, а именно тех, которые имеют конечное дополнение. Это — общий факт. Каждый раз, когда говорят о пределе, речь идет о некотором отображении f какого-то множества E в какое-то топологическое пространство F; при этом говорят, что f имеет пределом точку a пространства F, если, какова бы ни была окрестность V точки a, множество тех элементов x из E, образ которых содержится в V (т. е. полный «прообраз» $f^{-1}(V)$), принадлежит некоторому наперед заданному семейству $\mathfrak{F}$ подмножеств множества E. Чтобы понятие предела обладало существенными свойствами, которые ему обычно присущи, от семейства $\mathfrak{F}$ требуется выполнение некоторых аксиом, которые сформулированы в § 6 гл. I. Такое семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств множества E называется *фильтром* в E. Впрочем, понятие фильтра, которое, таким образом, неотделимо от понятия предела, встречается в топологии повсюду: например, окрестности точки в топологическом пространстве образуют фильтр.

Общее изучение всех приведенных понятий составляет основной предмет гл. I. В ней изучаются также некоторые частные классы топологических пространств: пространства, удовлетворяющие аксиомам более жестким, чем общие, и пространства, получаемые путем применения особых процессов из уже заданных пространств.

Как уже сказано, топологическая структура в множестве дает возможность придать точный смысл выражению: «как только точка x достаточно близка к a, x обладает свойством $P\{x\}$». Но, за исключением того случая, когда определено «расстояние», не видно, какой смысл следует придать выражению: «любая пара достаточно близких точек x, y обладает свойством $P\{x, y\}$». Это происходит оттого, что мы не имеем априори никаких средств сравнивать между собой окрестности двух различных точек. Между тем понятие пары близких точек часто встречается в классическом анализе (в частности, в предложениях, где речь идет о равномерной непрерывности). Поэтому важно придать этому выражению точный смысл во всей общности; это приводит к

определению структур, более богатых, чем топологические, а именно *равномерных структур*. Они изучаются в гл. II.

Остальные главы этой книги III посвящены вопросам, где одновременно с топологическими структурами или равномерными структурами участвуют еще другие структуры. Например, группа, в которой определена надлежащая (т. е. в известном смысле согласующаяся со структурой группы) топология, носит название *топологической группы*. Топологические группы изучаются в гл. III, где, в частности, показывается, каким образом любую топологическую группу можно наделить некоторой равномерной структурой.

В гл. IV предшествующие теории применяются к телу рациональных чисел (определенному чисто алгебраическим путем в гл. I книги II), что позволяет определить тело вещественных чисел; ввиду его важной роли оно тут же подвергается детальному изучению.

Отправляясь от вещественных чисел, в следующих главах определяются некоторые топологические пространства, особенно интересные с точки зрения приложений топологии к классической геометрии: векторные пространства конечной размерности, сферы, проективные пространства и т. д. Изучаются также некоторые топологические группы, тесно связанные с аддитивной группой вещественных чисел и характеризующие ее аксиоматически; это приводит к определению и элементарным свойствам наиболее важных в классическом анализе функций: показательной, логарифма и тригонометрических функций.

В гл. IX мы снова возвращаемся к общим топологическим пространствам, вооруженные новым инструментом, а именно вещественным числом; в частности, изучаются пространства, топология которых определяется посредством «расстояния»; они обладают некоторыми свойствами, заведомо не имеющими места для более общих пространств.

В гл. X изучаются множества отображений топологического пространства в равномерное пространство (называемые функциональными пространствами); эти множества, наделенные в свою очередь надлежащей топологической структурой, обладают интересными свойствами, играющими важную роль даже в классическом анализе. Наконец, последняя глава посвящена изучению понятий накрывающего и односвязного пространств.

ГЛАВА I

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

§ 1. Открытые множества; окрестности; замкнутые множества

1. Открытые множества

Определение 1. *Топологической структурой* (или, короче, *топологией*) *в множестве* X *называют структуру, образованную заданием множества* $\mathfrak{O}$ *подмножеств множества* X, *обладающего следующими свойствами* (называемыми *аксиомами топологических структур*):

(O_I) *Всякое объединение множеств из* $\mathfrak{O}$ *есть множество из* $\mathfrak{O}$.

(O_{II}) *Пересечение всякого конечного семейства множеств из* $\mathfrak{O}$ *есть множество из* $\mathfrak{O}$.

Множества из $\mathfrak{O}$ *называются открытыми множествами топологической структуры, определяемой посредством* $\mathfrak{O}$ *в* X.

Определение 2. *Топологическим пространством называют множество, наделенное топологической структурой.*

Элементы топологического пространства часто называются *точками*. Множество X, в котором определена топология, называется *носителем* топологического пространства X.

Аксиома (O_I) влечет, в частности, что объединение пустого множества множеств из $\mathfrak{O}$, т. е. *пустое множество* (Теор. множ., Сводка результ., § 4, формула (33)), принадлежит $\mathfrak{O}$. Аксиома (O_{II}) влечет, что пересечение пустого множества множеств из $\mathfrak{O}$, т. е. *множество* X (Теор. множ., Сводка результ., § 4, формула (40)), принадлежит $\mathfrak{O}$.

Для доказательства того, что множество $\mathfrak{O}$ подмножеств из X удовлетворяет аксиоме (O_{II}), часто удобно установить, что оно удовлетворяет каждой из следующих двух аксиом, объединение которых равносильно (O_{II}):

($O_{II\,a}$) *Пересечение любых двух множеств из* $\mathfrak{O}$ *принадлежит* $\mathfrak{O}$.

($O_{II\,б}$) X *принадлежит* $\mathfrak{O}$.

Примеры топологий. Множество подмножеств какого-либо множества X, состоящее из X и $\varnothing$, удовлетворяет аксиомам (O_I) и (O_{II}) и определяет, таким образом, топологию в X. То же справедливо для множества $\mathfrak{P}(X)$ всех подмножеств множества X; топологию, которую оно определяет, называют *дискретной топологией* в X, а множество X, наделенное этой топологией,— *дискретным пространством*.

Покрытие $(U_\iota)_{\iota\in I}$ подмножества A топологического пространства X (Теор. множ., Сводка результ., § 4, n° 4) называют *открытым*, если все U_ι— открытые множества в X.

Определение 3. *Гомеоморфизмом топологического пространства* X *на топологическое пространство* X' *называют изоморфизм топологической структуры пространства* X *на топологическую структуру пространства* X', т. е., в соответствии с общими определениями (Теор. множ., Сводка результ., § 8, n° 5),— *биекцию* X *на* X', *преобразующую множество всех открытых множеств из* X *в множество всех открытых множеств из* X'.

Говорят, что X и X' *гомеоморфны*, если существует гомеоморфизм X на X'.

Пример. Если X и X'— дискретные пространства, то всякая биекция X на X' является гомеоморфизмом.

Определение гомеоморфизма непосредственно сводится к следующему критерию: *для того чтобы биекция* f *топологического пространства* X *на топологическое пространство* X' *была гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы образ при отображении* f *всякого открытого множества из* X *был открытым множеством в* X', *а прообраз относительно* f *всякого открытого множества из* X'— *открытым множеством в* X.

2. *Окрестности*

Определение 4. *Окрестностью множества A в топологическом пространстве X называют всякое множество, которое содержит какое-либо открытое множество, содержащее A. Окрестности одноточечного множества $\{x\}$ называют также окрестностями точки x.*

Ясно, что всякая окрестность множества A в X является также окрестностью каждого множества $B \subset A$ и, в частности, каждой точки из A. Обратно, пусть A — окрестность каждой точки множества B и U — объединение всех открытых множеств, содержащихся в A; тогда $U \subset A$, и так как каждая точка из B принадлежит некоторому открытому множеству, содержащемуся в A, то $B \subset U$; но U открыто в силу (O_I); следовательно, A — окрестность множества B. В частности:

Предложение 1. *Для того чтобы множество было окрестностью каждой своей точки, необходимо и достаточно, чтобы оно было открытым.*

Слово «окрестность» имеет в обыденной речи такой смысл, что многие свойства, в которых участвует названное нами тем же именем математическое понятие, выступают как математическое выражение интуитивно ясных свойств; тем самым выбор этого термина имеет то преимущество, что делает речь более образной. Для той же цели можно использовать в некоторых утверждениях также выражение «достаточно близкий» и «сколь угодно близкий». Например, предложение 1 можно выразить в следующей форме: для того чтобы множество A было открытым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in A$ все точки, *достаточно близкие к* x, принадлежали A. И вообще, если некоторое свойство имеет место для всех точек некоторой окрестности точки x, то говорят, что им обладают все точки, *достаточно близкие* к x.

Обозначим через $\mathfrak{V}(x)$ множество всех окрестностей точки x. Множества из $\mathfrak{V}(x)$ обладают следующими свойствами:

(V_I) *Всякое подмножество множества X, содержащее какое-нибудь множество из $\mathfrak{V}(x)$, принадлежит $\mathfrak{V}(x)$.*

(V_{II}) *Пересечение конечного числа множеств из $\mathfrak{V}(x)$ принадлежит $\mathfrak{V}(x)$.*

(V_{III}) *Элемент x принадлежит каждому множеству из $\mathfrak{V}(x)$.*

Действительно, эти три свойства являются непосредственными следствиями определения 4 и аксиомы (O_{II}).

(V_{IV}) *Для каждого V, принадлежащего $\mathfrak{V}(x)$, существует W, принадлежащее $\mathfrak{V}(x)$, такое, что V принадлежит $\mathfrak{V}(y)$ для любого $y \in W$.*

Действительно, на основании предложения 1 достаточно взять за W любое открытое множество, содержащее x и содержащееся в V.

Последнее свойство можно еще выразить, сказав, что *окрестность точки x есть вместе с тем окрестность всех точек, достаточно близких к x.*

Эти четыре свойства множества $\mathfrak{V}(x)$ являются *характеристическими*. А именно:

Предложение 2. *Если каждому элементу x множества X поставлено в соответствие множество $\mathfrak{V}(x)$ подмножеств из X так, что при этом имеют место свойства (V_I), (V_{II}), (V_{III}) и (V_{IV}), то в X существует, и притом единственная, топологическая структура, для которой $\mathfrak{V}(x)$ служит множеством всех окрестностей x при любом $x \in X$.*

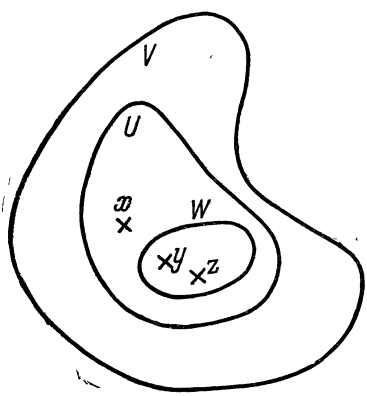

Рис. 1.

Если требуемая топологическая структура существует, то по предложению 1 множеством всех открытых множеств этой топологии необходимо служит множество $\mathfrak{O}$ всех таких множеств A из X, что $A \in \mathfrak{V}(x)$ *для любого* $x \in A$; отсюда *единственность* этой топологии, если последняя существует.

Но множество $\mathfrak{O}$ очевидно удовлетворяет аксиомам (O_I) и (O_{II}); для (O_I) это вытекает непосредственно из (V_I), а для (O_{II})— из (V_{II}). Остается убедиться в том, что для топологии, определяемой множеством $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{V}(x)$ является множеством всех окрестностей точки x для каждого $x \in X$. Из (V_I) вытекает, что всякая

окрестность точки x принадлежит $\mathfrak{V}(x)$. Обратно, пусть $V \in \mathfrak{V}(x)$ и U — множество тех точек y, для которых $V \in \mathfrak{V}(y)$; покажем, что $x \in U$, $U \subset V$ и $U \in \mathfrak{O}$, чем доказательство и будет завершено. Но $x \in U$, ибо $V \in \mathfrak{V}(x)$; $U \subset V$, ибо всякая точка $y \in U$ принадлежит V в силу (V_{III}) и предположения, что $V \in \mathfrak{V}(y)$. Значит, остается показать, что $U \in \mathfrak{O}$, т. е. что $U \in \mathfrak{V}(y)$ для всех $y \in U$; но (рис. 1) если $y \in U$, то согласно (V_{IV}) существует такое множество $W \in \mathfrak{V}(y)$, что $V \in \mathfrak{V}(z)$ при любом $z \in W$. Так как $V \in \mathfrak{V}(z)$ означает, что $z \in U$, то $W \subset U$, откуда в силу (V_I) $U \in \mathfrak{V}(y)$, что и требовалось доказать.

Предложение 2 показывает, что топологию в X можно определить заданием множеств $\mathfrak{V}(x)$ окрестностей точек из X, подчиненных лишь аксиомам (V_I), (V_{II}), (V_{III}) и (V_{IV}).

Пример. Определим топологию в множестве $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел, приняв за открытые множества всевозможные *объединения ограниченных открытых интервалов*; аксиома (O_I) выполняется при этом очевидным образом, а для проверки выполнения аксиомы (O_{II}) достаточно заметить, что если пересечение двух открытых интервалов $]a, b[$ и $]c, d[$ не пусто, то оно является открытым интервалом $]\alpha, \beta[$, где $\alpha = \sup(a, c)$, $\beta = \inf(b, d)$. Та же топология получится, если для каждого $x \in \mathbf{Q}$ определить множество $\mathfrak{V}(x)$ всех окрестностей этой точки как *множество всех подмножеств в* $\mathbf{Q}$, *содержащих каждое некоторый открытый интервал, которому принадлежит* x. Топологическое пространство, получаемое путем наделения $\mathbf{Q}$ описанной топологией, называется *рациональной прямой* (см. гл. IV, § 1, n° 2). Заметим, что в этом пространстве всякий открытый интервал есть открытое множество. °Таким же образом определяется топология в множестве $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел; $\mathbf{R}$, наделенное этой топологией, называют *числовой прямой* (см. § 2, упражнение 5 и гл. IV, § 1, n° 3).°

3. *Фундаментальные системы окрестностей; базисы топологии*

Определение 5. *Фундаментальной системой окрестностей точки* x (соотв. *множества* A) *в топологическом пространстве* X *называют всякое множество* $\mathfrak{S}$ *окрестностей* x (соотв. A), *обладающее тем свойством, что для любой окрестности* V *точки* x (соотв. *множества* A) *существует окрестность* $W \in \mathfrak{S}$ *такая, что* $W \subset V$.

Таким образом, если $\mathfrak{S}$ — фундаментальная система окрестностей множества A в X, то всякое пересечение конечного числа множеств из $\mathfrak{S}$ содержит некоторое множество из $\mathfrak{S}$.

Примеры. 1) В *дискретном* пространстве (n° 1) множество $\{x\}$ само образует фундаментальную систему окрестностей точки x.

2) На рациональной прямой Q (n° 2) множество всех открытых интервалов, содержащих точку x, является фундаментальной системой окрестностей этой точки. То же можно сказать о множестве открытых интервалов $\left]x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right[$, как и о множестве замкнутых интервалов $\left[x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right]$, где n принимает все целые значения >0 или только какую-нибудь строго возрастающую бесконечную последовательность целых значений >0.

°Аналогичные утверждения справедливы для числовой прямой.°

Определение 6. *Базисом топологии топологического пространства X называют всякое множество $\mathfrak{B}$ открытых множеств из X, такое, что любое открытое множество в X является объединением множеств, принадлежащих $\mathfrak{B}$.*

Предложение 3. *Для того чтобы множество $\mathfrak{B}$ открытых множеств топологического пространства X было базисом его топологии, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ множество всех $V \in \mathfrak{B}$ таких, что $x \in V$, было фундаментальной системой окрестностей x.*

Необходимость условия очевидна. Обратно, если условие выполнено, то для любого открытого множества U и любого $x \in U$ существует такое открытое множество $V_x \in \mathfrak{B}$, что $x \in V_x \subset U$. Объединение всех V_x $(x \in U)$ совпадает, таким образом, с U, что и завершает доказательство.

Примеры. 1) Множество всех одноточечных множеств является базисом дискретной топологии.

2) Множество всех ограниченных открытых интервалов по определению является базисом топологии рациональной прямой (n° 2). °Множество всех ограниченных открытых интервалов является также базисом топологии числовой прямой.°

4. Замкнутые множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Замкнутыми множествами в топологическом пространстве X называют дополнения открытых множеств.*

Путем перехода к дополнениям аксиомы (O_I) и (O_{II}) преобразуются соответственно следующим образом:

(O'_I) *Всякое пересечение замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

(O'_{II}) *Объединение всякого конечного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Пустое множество и все пространство X замкнуты (и, значит, *открыто-замкнуты*; см. § 11).

На рациональной прямой всякий интервал вида $[a, \to[$ является замкнутым множеством, потому что его дополнение $]\leftarrow, a[$ открыто; так же убеждаемся в том, что и всякий интервал вида $]\leftarrow, a]$ есть замкнутое множество; значит, и всякий замкнутый ограниченный интервал $[a, b]$, как пересечение интервалов $[a, \to[$ и $]\leftarrow, b]$, есть замкнутое множество.

Множество $\mathbf{Z}$ всех рациональных целых чисел замкнуто на рациональной прямой, потому что его дополнение $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}}]n, n+1[$ открыто.

Покрытие $(F_\iota)_{\iota \in I}$ множества A в топологическом пространстве X называется *замкнутым*, если все F_ι замкнуты в X.

Гомеоморфизм f топологического пространства X на топологическое пространство X' (n° 1) может быть еще охарактеризован как биекция X на X', *при которой образ всякого замкнутого множества из X есть замкнутое множество в X', а прообраз всякого замкнутого множества из X' есть замкнутое множество в X.*

5. Локально конечные семейства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Семейство $(A_\iota)_{\iota \in I}$ подмножеств топологического пространства X называют локально конечным, если для любой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность V, что $V \cap A_\iota = \varnothing$ для всех, кроме конечного числа, индексов $\iota \in I$. Множество $\mathfrak{S}$ подмножеств из X называют локально конечным, если локально конечно семейство множеств, определяемое тождественным отображением $\mathfrak{S}$ на себя.*

Ясно, что если $(A_\iota)_{\iota\in I}$ — локально конечное семейство множеств и $B_\iota\subset A_\iota$ для любого $\iota\in I$, то и семейство $(B_\iota)_{\iota\in I}$ локально конечно.

Очевидно, всякое *конечное* семейство подмножеств топологического пространства X локально конечно, но обратное неверно.

°Например, в $\mathbf{R}$ открытое покрытие, образованное интервалом $]\leftarrow, 1[$ и интервалами $]n, \rightarrow[$ с любыми целыми $n\geqslant 0$, локально конечно; однако, каждый интервал $]n, \rightarrow[$ пересекает бесконечное число множеств указанного покрытия.∘

Предложение 4. *Объединение локально конечного семейства замкнутых множеств топологического пространства X замкнуто в X.*

В самом деле, пусть $(F_\iota)_{\iota\in I}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств в X и пусть точка $x\in X$ не принадлежит $F=\bigcup_{\iota\in I} F_\iota$; существует окрестность V точки x, имеющая непустое пересечение только с множествами F_ι, индексы которых образуют в I *конечное* подмножество J. С другой стороны, для любого $\iota\in J$ множество $U_\iota=\complement F_\iota$ открыто и содержит x; отсюда заключаем, что $\complement F$ содержит окрестность $V\cap\bigcap_{\iota\in J} U_\iota$ точки x. В силу предложения 1 $\complement F$ открыто и, следовательно, F замкнуто.

Отметим, что объединение *произвольного* семейства замкнутых множеств в X не обязательно замкнуто; например, на рациональной прямой $\mathbf{Q}$ множество $]0, 1[$, являясь объединением замкнутых множеств $\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$ $(n>0)$, не замкнуто.

6. *Внутренность, замыкание, граница множества; всюду плотные множества*

Определение 9. *Точку x топологического пространства X называют внутренней точкой множества A, если A есть окрестность x. Множество всех внутренних точек множества A называется его внутренностью и обозначается $\mathring{A}$.*

По определениям 9 и 4, x есть внутренняя точка множества A, если существует открытое множество, содержащееся в A и содержащее x; отсюда следует, что $\mathring{A}$ есть объединение всех открытых

множеств, содержащихся в A, т. е. *наибольшее открытое множество, содержащееся в* A; другими словами, если B — *открытое* множество, содержащееся в A, то $B \subset \mathring{A}$. Следовательно, если A и B — такие множества в X, что $B \subset A$, то $\mathring{B} \subset \mathring{A}$; для того чтобы A было окрестностью B, необходимо и достаточно, чтобы $B \subset \mathring{A}$.

Замечание. Внутренность непустого множества может быть пустой; так обстоит дело для одноточечного множества, если только оно не является открытым, например для одноточечного множества на рациональной прямой °(или на числовой прямой)$_\circ$.

Предложение 1 может быть высказано еще следующим образом: *Для того чтобы множество было открытым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своей внутренностью.*

Из свойства (V_{II}) (n° 2) вытекает, что всякая точка, внутренняя одновременно для двух множеств A и B, будет внутренней и для $A \cap B$; отсюда

$$\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}. \qquad (1)$$

Всякая внутренняя точка дополнения множества A называется *внешней* к A, а множество таких точек — *внешностью* A в X; таким образом, точка $x \in X$, внешняя к A, характеризуется тем, что она *имеет окрестность, не пересекающуюся с* A.

Определение 10. *Говорят, что x есть точка прикосновения множества A в топологическом пространстве X, если всякая ее окрестность пересекает A. Множество всех точек прикосновения множества A называют его замыканием и обозначают $\overline{A}$.*

Это определение можно выразить еще, сказав, что x есть точка прикосновения множества A, если в A имеются точки, *сколь угодно близкие к* x.

Всякая точка, не являющаяся точкой прикосновения множества A, будет внешней к A, и обратно; таким образом, справедливы (двойственные друг другу) формулы:

$$\mathbf{C}\overline{A} = \overset{\circ}{\mathbf{C}A}, \qquad \mathbf{C}\mathring{A} = \overline{\mathbf{C}A}. \qquad (2)$$

Поэтому всякому предложению о внутренности множества соответствует *двойственное* (Теор. множ., Сводка результ., § 1, n° 15 и § 4, n° 7) предложение о замыкании, и обратно. В частности, замыкание множества A есть *наименьшее замкнутое множество, содержащее* A; другими словами, если B — *замкнутое* множество, содержащее A, то $\overline{A} \subset B$. Если A и B — два множества из X такие, что $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Для замкнутости множества необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своим замыканием.

Формуле (1) соответствует двойственная формула

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{3}$$

Предложение 5. *Если* A — открытое *множество в* X, *то для любого* $B \subset X$ справедлива формула

$$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}. \tag{4}$$

Действительно, если $x \in A$ есть точка прикосновения множества B, то для любой окрестности V этой точки множество $V \cap A$ тоже будет окрестностью x, ибо A открыто; значит, $V \cap A \cap B$ не пусто, и потому x есть точка прикосновения для $A \cap B$.

Если x — точка прикосновения множества A, не принадлежащая A, то всякая окрестность этой точки содержит точку из A, *отличную от* x; если же $x \in A$, то может случиться, что будет существовать окрестность точки x, не содержащая ни одной точки из A, отличной от x; в этом случае говорят, что x есть *изолированная точка* множества A; в частности, x — изолированная точка всего пространства X тогда и только тогда, когда $\{x\}$ — открытое множество.

Замкнутое множество, в котором нет изолированных точек, называют *совершенным*.

Определение 11. *Точку* x *топологического пространства* X *называют граничной точкой множества* A, *если она является точкой прикосновения одновременно для* A *и для* $\mathbf{C}A$; *множество*

всех граничных точек множества A называют границей этого множества.

Таким образом, границей множества A служит *замкнутое* множество $\overline{A} \cap \overline{\mathbf{C}A}$. Граничная точка x множества A характеризуется тем, что любая ее окрестность содержит по крайней мере одну точку из A и по крайней мере одну точку из $\mathbf{C}A$; сама точка x может как принадлежать, так и не принадлежать A. Граница A совпадает с границей $\mathbf{C}A$; если взять внутренность A, внешность A и границу A, то те из этих трех множеств, которые не пусты, образуют *разбиение* пространства X.

Определение 12. *Говорят, что подмножество A топологического пространства X плотно в X* (или также *всюду плотно*, когда не может возникнуть неясность относительно X), *если $\overline{A} = X$, т. е. если для любого непустого открытого множества U из X пересечение $U \cap A$ не пусто.*

Примеры. °В гл. IV, § 1 мы увидим, что множество всех рациональных чисел и его дополнение всюду плотны в числовой прямой.°

В дискретном пространстве X не существует всюду плотных множеств, отличных от X. Напротив, если единственными открытыми множествами для топологии в X являются $\varnothing$ и X, то всякое непустое множество всюду плотно.

Предложение 6. *Если $\mathfrak{B}$ — базис топологии топологического пространства X, то в X существует такое всюду плотное множество D, что* $\mathrm{Card}\,(D) \leqslant \mathrm{Card}\,(\mathfrak{B})$.

Действительно, можно ограничиться тем случаем, когда множества из $\mathfrak{B}$ не пусты (уже непустые множества из $\mathfrak{B}$ образуют базис топологии в X); пусть тогда x_U — точка из U для любого $U \in \mathfrak{B}$; из предложения 3 вытекает, что множество D точек x_U плотно в X; и при этом $\mathrm{Card}(D) \leqslant \mathrm{Card}\,(\mathfrak{B})$ (Теор. множ., гл. III, § 3, предложение 3).

Упражнения

1) Найти все топологии в множестве из двух или трех элементов.

2) а) Пусть X — *упорядоченное* множество. Показать, что множество интервалов $[x, \rightarrow[$ (соотв. $]\leftarrow, x]$) есть базис некоторой топологии в X; будем называть ее *правой* (соотв. *левой*) топологией. Для правой

топологии всякое пересечение открытых множеств есть открытое множество; замыканием множества $\{x\}$ служит интервал $]\leftarrow, x]$.

б) Топологическое пространство X называется *колмогоровским пространством*, если оно удовлетворяет следующему условию: для любых двух различных точек x, x' из X существует окрестность одной из них, не содержащая другую. Показать, что упорядоченное множество, наделенное правой топологией, есть колмогоровское пространство.

в) Пусть X — колмогоровское пространство, в котором всякое пересечение открытых множеств есть открытое множество. Показать, что $x \in \overline{\{x'\}}$ есть отношение порядка между x и x' в X и что если записывать его в виде $x \leqslant x'$, то заданная топология в X будет совпадать с правой топологией, определенной этим отношением.

г) Вывести из в), что если X — колмогоровское пространство, то всякое непустое конечное множество в X имеет по крайней мере одну изолированную точку. Если X не имеет изолированных точек, то всякое непустое открытое множество в X бесконечно.

3) Для каждого множества A в топологическом пространстве X положим $\alpha(A)=\overset{\circ}{A}$, $\beta(A)=\overline{A}$. Из $A \subset B$ следует $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ и $\beta(A) \subset \beta(B)$.

а) Показать, что если A открыто, то $A \subset \alpha(A)$, а если A замкнуто, то $\beta(A) \subset A$.

б) Вывести из а), что $\alpha(\alpha(A))=\alpha(A)$ и $\beta(\beta(A))=\beta(A)$ для любого $A \subset X$.

в) Привести пример множества A °(на числовой прямой)$_\circ$, для которого семь множеств A, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$, $\beta(\overline{A})$, $\alpha(\overset{\circ}{A})$ попарно различны и не удовлетворяют никаким отношениям включения, кроме следующих:

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A},\quad \overset{\circ}{A} \subset \alpha(\overset{\circ}{A}) \subset \beta(A) \subset \overline{A},$$

$$\overset{\circ}{A} \subset \alpha(\overline{A}) \subset \beta(\overline{A}) \subset \overline{A},\quad \alpha(\overset{\circ}{A}) \subset \alpha(A),\quad \beta(A) \subset \beta(\overline{A}).$$

г) Показать, что если U и V — открытые множества и $U \cap V = \varnothing$, то также $\alpha(U) \cap \alpha(V) = \varnothing$ (использовать б)).

4) а) Привести пример открытых множеств A и B °на числовой прямой$_\circ$, для которых $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cap B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$ попарно различны.

б) °Привести пример двух интервалов A, B на числовой прямой, для которых $A \cap \overline{B}$ не содержится в $\overline{A \cap B}$.$_\circ$

5) Будем обозначать через $\mathrm{Fr}(A)$ границу множества A в топологическом пространстве X.

а) Показать, что $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$, $\mathrm{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$, и привести °на числовой прямой$_\circ$ пример, когда эти три множества различны,

б) Пусть A, B—два множества в X; показать, что $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \cup \mathrm{Fr}(B)$, и привести °на числовой прямой₀ пример, когда эти множества различны. Показать, что если $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, то $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

в) Показать, что если A и B — открытые множества в X, то

$$(A \cap \mathrm{Fr}(B)) \cup (B \cap \mathrm{Fr}(A)) \subset \mathrm{Fr}(A \cap B) \subset$$
$$\subset (A \cap \mathrm{Fr}(B)) \cup (B \cap \mathrm{Fr}(A)) \cup (\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B));$$

привести °на числовой прямой₀ пример, когда эти три множества различны.

6) Для того чтобы множество A в топологическом пространстве X имело непустое пересечение с любым всюду плотным в X множеством, необходимо и достаточно, чтобы внутренность A была непустой.

7) Пусть X — топологическое пространство. Рассмотрим следующие четыре свойства:

($\mathrm{D_I}$) Топология пространства X обладает счетным базисом.

($\mathrm{D_{II}}$) В X существует счетное всюду плотное множество.

($\mathrm{D_{III}}$) Всякое множество в X, все точки которого — изолированные, счетно.

($\mathrm{D_{IV}}$) Всякое множество непустых попарно не пересекающихся открытых множеств в X счетно.

Показать, что свойство ($\mathrm{D_I}$) влечет ($\mathrm{D_{II}}$) и ($\mathrm{D_{III}}$) и что каждое из свойств ($\mathrm{D_{II}}$) и ($\mathrm{D_{III}}$) влечет ($\mathrm{D_{IV}}$) *).

8) Если подмножество A топологического пространства X не имеет изолированных точек, то то же справедливо и для его замыкания $\overline{A}$ в X.

9) Пусть X — множество, $M \to \overline{M}$ — такое отображение $\mathfrak{P}(X)$ в себя, что: 1° $\overline{\varnothing} = \varnothing$; 2° $M \subset \overline{M}$ для любого $M \subset X$; 3° $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ для любого $M \subset X$; 4° $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ для любых $M \subset X$, $N \subset X$. Показать, что в X существует, и притом единственная, топология, в которой $\overline{M}$ является замыканием M для любого $M \subset X$. [Определить замкнутые множества в этой топологии.]

---

*) Пример пространства, в котором выполнено ($\mathrm{D_{IV}}$), но не имеют места ни ($\mathrm{D_{II}}$), ни ($\mathrm{D_{III}}$), см. в упражнении 6б § 8. Пример пространства, в котором выполнены ($\mathrm{D_{II}}$) и ($\mathrm{D_{III}}$), но не имеет места ($\mathrm{D_I}$), см. в упражнении 16 § 5 гл. IX (2-е изд.). Примеры пространств, в которых выполнено только одно из условий ($\mathrm{D_{II}}$), ($\mathrm{D_{III}}$), см. в упражнении 24 § 9.

°В *метризуемом* пространстве свойства ($\mathrm{D_I}$) и ($\mathrm{D_{IV}}$) равносильны: предложение 12 § 2 главы IX (2-е изд.) показывает, что ($\mathrm{D_I}$) и ($\mathrm{D_{II}}$) равносильны; с другой стороны, если ($\mathrm{D_{IV}}$) выполнено, то для любого n существует *максимальное* счетное множество $\mathfrak{B}_n = (B_{nm})_{m \geqslant 0}$ попарно не пересекающихся шаров радиуса $\frac{1}{n}$ и объединение всех этих шаров всюду плотно; счетное множество центров шаров B_{nm} будет тогда всюду плотным.₀

§ 2. Непрерывные функции

1. Непрерывные функции

Определение 1. *Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство X' называют непрерывным в точке x_0, если для любой окрестности V' точки $f(x_0)$ в X' существует окрестность V точки x_0 в X такая, что $x \in V$ влечет $f(x) \in V'$.*

Этому определению можно придать следующую, более наглядную форму: утверждение, что f непрерывна в точке x_0, означает, что $f(x)$ *сколь угодно близко к* $f(x_0)$, *коль скоро* x *достаточно близко к* x_0.

Отношение «$f(x) \in V'$ для всех $x \in V$» равносильно отношению $f(V) \subset V'$ или также $V \subset \overset{-1}{f}(V')$; принимая во внимание аксиому окрестностей (V_I), заключаем, что определение 1 равносильно следующему: *говорят, что отображение $f: X \to X'$ непрерывно в точке x_0, если прообраз $\overset{-1}{f}(V')$ всякой окрестности V' в X' точки $f(x_0)$ является окрестностью точки x_0 в X.* Впрочем, достаточно, чтобы $\overset{-1}{f}(V')$ было окрестностью x_0 для любой окрестности V', принадлежащей некоторой *фундаментальной системе окрестностей* точки $f(x_0)$ в X' (§ 1, n° 3).

Предложение 1. *Пусть f — отображение топологического пространства X в топологическое пространство X'. Если f непрерывно в точке x, а x — точка прикосновения множества A в X, то $f(x)$ — точка прикосновения множества $f(A)$ в X'.*

В самом деле, пусть V' — окрестность точки $f(x)$ в X'; поскольку $\overset{-1}{f}(V')$ есть окрестность точки x в X, существует точка $y \in A \cap \overset{-1}{f}(V')$, откуда $f(y) \in f(A) \cap V'$; этим доказано, что $f(x)$ — точка прикосновения множества $f(A)$.

Предложение 2. *Пусть X, X', X'' — топологические пространства, f — отображение X в X', непрерывное в точке $x \in X$, g — отображение X' в X'', непрерывное в точке $f(x)$. Тогда составное отображение $h = g \circ f$ пространства X в X'' непрерывно в точке x.*

В самом деле, пусть V'' — окрестность точки $h(x)=g(f(x))$ в X''; в силу непрерывности g в точке $f(x)$, $g^{-1}(V'')$ есть окрестность точки $f(x)$ в X'; поскольку f непрерывно в точке x, $f^{-1}(g^{-1}(V''))=h^{-1}(V'')$ есть окрестность x в X, чем предложение доказано.

Определение 2. *Отображение топологического пространства X в топологическое пространство X' называют непрерывным на X* (или просто *непрерывным*), *если оно непрерывно в каждой точке из X.*

Примеры. 1) Тождественное отображение топологического пространства X на себя непрерывно.

2) Постоянное отображение топологического пространства в топологическое пространство непрерывно.

3) Всякое отображение дискретного пространства в топологическое пространство непрерывно.

Теорема 1. *Пусть f — отображение топологического пространства X в топологическое пространство X'; следующие свойства равносильны:*

а) *f непрерывно на X;*

б) *$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ для любого $A\subset X$;*

в) *прообраз всякого замкнутого множества из X' есть замкнутое множество в X;*

г) *прообраз всякого открытого множества из X' есть открытое множество в X.*

Мы уже видели, что а) влечет б) (предложение 1). Покажем, что б) влечет в): пусть F' — замкнутое множество в X' и $F=f^{-1}(F')$; по предположению имеем $f(\overline{F})\subset\overline{f(F)}\subset\overline{F'}=F'$, откуда $\overline{F}\subset f^{-1}(F')=F\subset\overline{F}$, т. е. $F=\overline{F}$ и F замкнуто. в) влечет г) в силу того, что $\mathbf{C}f^{-1}(A')=f^{-1}(\mathbf{C}A')$ для любого $A'\subset X'$. Пусть, наконец, выполнено г); для любого $x\in X$ и любой окрестности V' точки $f(x)$ в X' существует открытое множество A' в X' такое, что $f(x)\in A'\subset V'$;

тогда $x \in \overset{-1}{f}(A') \subset \overset{-1}{f}(V')$ и, поскольку $\overset{-1}{f}(A')$ открыто, $\overset{-1}{f}(V')$ является окрестностью точки x в X, чем доказано, что г) влечет а).

Замечания. 1) Пусть $\mathfrak{B}$ — базис (§ 1, n° 3) топологии в X'; для того чтобы $f: X \to X'$ было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы $\overset{-1}{f}(U')$ был открытым в X для любого $U' \in \mathfrak{B}$.

Примеры. Пусть a — какое-либо рациональное число; отображение $x \longmapsto a+x$ рациональной прямой Q на себя непрерывно на Q, ибо прообраз открытого интервала $]b, c[$ относительно этого отображения есть открытый интервал $]b-a, c-a[$. Отображение $x \longmapsto ax$ тоже непрерывно на Q: это очевидно, если $a=0$, ибо тогда $ax=0$ при любом x; если же $a \neq 0$, то прообразом открытого интервала $]b, c[$ служит открытый интервал с концами $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$.

2) При непрерывном отображении X в X' *образ* открытого (соотв. замкнутого) множества из X может не быть открытым (соотв. замкнутым) множеством в X' (см. § 5).

Пример. °Отображение f: $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ числовой прямой R в себя непрерывно, но $f(\mathrm{R})$ есть полуоткрытый интервал $]0,1]$, а он ни открыт и ни замкнут в R.°

Теорема 2. 1° *Пусть* $f: X \to X'$ *и* $g: X' \to X''$ *— непрерывные отображения, тогда* $g \circ f: X \to X''$ *непрерывно.*

2° *Для того чтобы биекция* f *топологического пространства* X *на топологическое пространство* X' *была гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы и* f *и обратная к* f *биекция* g *были непрерывны* (или, как еще говорят, чтобы f было *взаимно непрерывно*).

Первое утверждение есть непосредственное следствие предложения 2; второе вытекает из теоремы 1г и определения гомеоморфизма (§ 1, n° 1).

Замечания. 3) Может существовать *непрерывная биекция* топологического пространства X на топологическое пространство X', *не являющаяся взаимно непрерывной*; пример получим, взяв

за X' рациональную прямую $\mathbf{Q}$, а за X — множество $\mathbf{Q}$, наделенное дискретной топологией; тождественное отображение $X \to X'$ будет непрерывно, но не будет гомеоморфизмом.

4) Чтобы убедиться в том, что непрерывная биекция f: $X \to X'$ есть гомеоморфизм, достаточно доказать, что $f(V)$ есть окрестность точки $f(x)$ в X' для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности V.

5) Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{V}(x)$ для каждого $x \in X$ — множество всех окрестностей x. Пусть x_0—точка из X; определим для каждого $x \in X$ множество $\mathfrak{V}_0(x)$ подмножеств из X следующим образом: $\mathfrak{V}_0(x_0) = \mathfrak{V}(x_0)$, а если $x \neq x_0$, то $\mathfrak{V}_0(x)$ — множество всех подмножеств из X, содержащих x. Непосредственно проверяется (§ 1, предложение 2), что $\mathfrak{V}_0(x)$ — множества окрестностей точек x из X для некоторой топологии в X; обозначим через X_0 полученное так топологическое пространство, а через j — тождественное отображение $X_0 \to X$, непрерывное, но вообще не взаимно непрерывное. Для того чтобы отображение f пространства X в топологическое пространство X' было непрерывно *в точке* x_0, необходимо и достаточно, чтобы составное отображение $X_0 \overset{j}{\to} X \overset{f}{\to} X'$ было *непрерывно на* X_0, что непосредственно вытекает из определений.

2. *Сравнение топологий*

Теорема 2 показывает, что в качестве *морфизмов* топологических структур можно взять непрерывные отображения (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 1); мы будем всегда предполагать в дальнейшем, что сделан именно этот выбор морфизмов. В соответствии с общими определениями (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 2) это позволяет определить отношение порядка в множестве всех топологий в одном и том же множестве X:

Определение 3. *Пусть даны топологии* $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ *в одном и том же множестве* X; *говорят, что* $\mathscr{T}_1$ *мажорирует* $\mathscr{T}_2$ (*и что* $\mathscr{T}_2$ *мажорируется* $\mathscr{T}_1$), *если тождественное отображение* $X_1 \to X_2$, *где* X_i — *множество* X, *наделенное топологией* $\mathscr{T}_i$ ($i = 1, 2$), *непрерывно. Если, кроме того,* $\mathscr{T}_1 \neq \mathscr{T}_2$, *то говорят, что* $\mathscr{T}_1$ *сильнее* $\mathscr{T}_2$ (*а* $\mathscr{T}_2$ *слабее* $\mathscr{T}_1$).

Две топологии, одна из которых мажорирует другую, называют *сравнимыми.*

Критерии непрерывности отображения (определение 1 и теорема 1) сразу дают следующее предложение:

Предложение 3. *Пусть* $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ — *топологии в множестве* X. *Следующие предложения равносильны*:

а) $\mathscr{T}_1$ *мажорирует* $\mathscr{T}_2$.

б) *Каково бы ни было* $x \in X$, *всякая окрестность* x *в топологии* $\mathscr{T}_2$ *есть окрестность* x *в топологии* $\mathscr{T}_1$.

в) *Для любого* $A \subset X$ *замыкание* A *в топологии* $\mathscr{T}_2$ *содержит замыкание* A *в топологии* $\mathscr{T}_1$.

г) *Всякое множество из* X, *замкнутое в* $\mathscr{T}_2$, *замкнуто в* $\mathscr{T}_1$.

д) *Всякое множество из* X, *открытое в* $\mathscr{T}_2$, *открыто в* $\mathscr{T}_1$.

Пример. °В гильбертовом пространстве H всех последовательностей $\mathbf{x}=(x_n)$ вещественных чисел, для которых $\|\mathbf{x}\|^2=\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2<+\infty$, окрестностями точки $\mathbf{x}_0$ в *сильной* топологии являются всевозможные множества, содержащие каждое какой-нибудь шар $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\alpha$ с центром в $\mathbf{x}_0$; окрестностями $\mathbf{x}_0$ в *слабой* топологии являются множества, содержащие подмножество, определяемое условием вида

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\mathbf{a}_i)|\leqslant 1$$

(где $\mathbf{a}_i$ — точки из H, а $(\mathbf{x}|\mathbf{y})=\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ для $\mathbf{x}=(x_n)$ и $\mathbf{y}=(y_n)$) (Топ. вект. простр., гл. V). Пусть $\beta=\sup_{1\leqslant i\leqslant n} \|\mathbf{a}_i\|$; тогда $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leqslant\frac{1}{\beta}$ влечет $|(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\mathbf{a}_i)|\leqslant\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\cdot\|\mathbf{a}_i\|\leqslant 1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, чем доказано, что сильная топология *мажорирует* слабую. С другой стороны, в H для всякого конечного семейства точек $(\mathbf{a}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ существуют такие точки $\mathbf{x}$, что $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\mathbf{a}_i)=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, а $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|$ *сколь угодно велико*; это показывает, что сильная топология *сильнее* слабой.°

Замечания. 1) В упорядоченном множестве топологий в множестве X дискретная топология *самая сильная*, а топология, единственными открытыми множествами которой являются $\varnothing$ и X, *самая слабая*.

2) Говоря образно: чем топология *сильнее*, тем *больше* открытых множеств, замкнутых множеств, окрестностей; замыкание (соотв. внутренность) множества тем *меньше* (соотв. *больше*), чем топо-

логия *сильнее*; чем топология *сильнее*, тем *меньше* всюду плотных множеств.

3) Непрерывное отображение $f\colon X \to X'$ останется непрерывным при замене топологии в X *мажорирующей* топологией, а топологии в X' — *мажорируемой* (теорема 2). Иначе говоря, непрерывных отображений X в X' тем *больше*, чем топология в X *сильнее*, а топология в X' *слабее*.

3. Инициальные топологии

Предложение 4. *Пусть X — множество, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических пространств, f_ι для любого $\iota \in I$ — отображение X в Y_ι. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех подмножеств из X вида $f_\iota^{-1}(U_\iota)$ ($\iota \in I$, U_ι — открытое множество в Y_ι) и $\mathfrak{B}$ — множество пересечений всевозможных конечных семейств множеств из $\mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{B}$ есть базис топологии $\mathscr{T}$ в X, являющейся инициальной топологической структурой в X относительно семейства (f_ι)* (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 3) *и, в частности, слабейшей из тех топологий в X, при которых все f_ι непрерывны. Говоря точнее, для того чтобы отображение g топологического пространства Z в X (наделенное топологией $\mathscr{T}$) было непрерывно в точке $z \in Z$, необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций $f_\iota \circ g$ была непрерывна в точке z.*

Пусть $\mathfrak{O}$ — множество *всевозможных* объединений множеств из $\mathfrak{B}$; ясно, что $\mathfrak{O}$ удовлетворяет аксиоме (O_I) в силу ассоциативности объединения и аксиоме (O_{II}) в силу определения $\mathfrak{B}$ и дистрибутивности пересечения конечных семейств относительно произвольных объединений (Теор. множ., Сводка результ., § 4, формула (37)). Таким образом, $\mathfrak{O}$ есть совокупность всех открытых множеств некоторой топологии $\mathscr{T}$ в X, а $\mathfrak{B}$ — базис этой топологии. Докажем последнее утверждение предложения, что повлечет остальные на основании общих свойств инициальных структур (Теор. множ., глава IV, § 2, n° 3, критерий CST 9). Прежде всего, определение $\mathfrak{S}$ показывает, что f_ι непрерывны на X (теорема 1); поэтому, если g непрерывно в точке z, то то же верно и для $f_\iota \circ g$ (предложение 2). Обратно, предположим, что все $f_\iota \circ g$ непрерывны в точке z, и пусть V — окрестность $g(z)$ в X; по определению существуют конечное подмножество J множества I и для каждого

$\iota \in J$ открытое множество U_ι в Y_ι такие, что V содержит $\bigcap_{\iota \in J} f_\iota^{-1}(U_\iota)$, а $g(z)$ принадлежит этому последнему множеству. Но $g^{-1}(V) \supset \supset \bigcap_{\iota \in J} g^{-1}(f_\iota^{-1}(U_\iota))$, а из предположения вытекает, что каждое из множеств $g^{-1}(f_\iota^{-1}(U_\iota))$ есть окрестность z в Z; следовательно, также $g^{-1}(V)$ — окрестность z в Z, что и завершает доказательство.

Пусть $\mathfrak{B}_\iota$ — *базис* топологии в Y_ι ($\iota \in I$); обозначим через $\mathfrak{S}'$ множество всевозможных подмножеств из X вида $f_\iota^{-1}(U_\iota)$, где $U_\iota \in \mathfrak{B}_\iota$ для любого $\iota \in I$. Непосредственно ясно, что множество $\mathfrak{B}'$ пересечений всевозможных конечных семейств множеств из $\mathfrak{S}'$ также является *базисом* топологии $\mathscr{T}$.

Общие свойства инициальных структур (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 3, критерий CST 10) влекут, в частности, следующее свойство *транзитивности* (впрочем, и непосредственно очевидное):

Предложение 5. *Пусть X — множество, $(Z_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических пространств, $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — разбиение I и $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство множеств, имеющее L своим множеством индексов. Пусть, наконец, h_λ для каждого $\lambda \in L$ — отображение X в Y_λ, а g_ι для любых $\lambda \in L$ и $\iota \in J_\lambda$ — отображение Y_λ в Z_ι; положим тогда $f_\iota = g_\iota \circ h_\lambda$. Наделим каждое Y_λ слабейшей из топологий, при которых все g_ι ($\iota \in J_\lambda$) непрерывны; тогда слабейшая из топологий в X, при которых непрерывны все f_ι, совпадает со слабейшей из топологий, при которых непрерывны все h_λ.*

Примеры. I. *Прообраз топологии.* Пусть X — множество, Y — топологическое пространство, f — отображение X в Y; слабейшая топология $\mathscr{T}$ в X, сохраняющая непрерывность f, называется *прообразом* относительно f топологии пространства Y. Из предложения 4 и формул, выражающих прообразы объединения и пересечения (Теор. множ., Сводка результ., § 4, формулы (34) и (46)), вытекает, что открытые (соотв. замкнутые) множества для $\mathscr{T}$ — это *прообразы* относительно f открытых (соотв. замкнутых) мно-

жеств из Y; следовательно, для каждого $x \in X$ множества $f^{-1}(W)$, где W пробегает фундаментальную систему окрестностей $f(x)$ в Y, образуют фундаментальную систему окрестностей x в $\mathscr{T}$. В § 3 под наименованием *индуцированной топологии* будет изучен тот частный случай, когда $X \subset Y$, а f — каноническая инъекция $X \to Y$; X, наделенное этой топологией, называется тогда *подпространством* пространства Y (см. § 3, n° 1).

Для того чтобы отображение f топологического пространства X в топологическое пространство X' было *непрерывно*, необходимо и достаточно, чтобы топология X *мажорировала* прообраз топологии X' относительно f.

II. *Верхняя грань множества топологий.* Всякое семейство $(\mathscr{T}_\iota)_{\iota \in I}$ топологий в множестве X обладает *верхней гранью* $\mathscr{T}$ в упорядоченном множестве всех топологий в X, т. е. среди топологий в X, *мажорирующих* все $\mathscr{T}_\iota$, существует *слабейшая*. В самом деле, достаточно применить предложение 4, обозначая через Y множество X, наделенное топологией $\mathscr{T}_\iota$, и через f_ι — тождественное отображение $X \to Y_\iota$; тогда $\mathscr{T}$ будет слабейшей из топологий, для которых непрерывны все f_ι.

Пусть теперь $\mathfrak{S}$ — *произвольное* множество подмножеств множества X; среди всех топологий $\mathscr{T}$ в X, для которых каждое множество из $\mathfrak{S}$ *открыто*, существует слабейшая $\mathscr{T}_0$, называемая топологией, *порождаемой множеством* $\mathfrak{S}$; в самом деле, достаточно рассмотреть в X для каждого множества $U \in \mathfrak{S}$ топологию $\mathscr{T}_U$, открытыми множествами которой являются $\varnothing$, U и X (такое множество подмножеств очевидно удовлетворяет аксиомам (O_I) и (O_{II})); топология $\mathscr{T}_0$ есть не что иное, как *верхняя грань топологий* $\mathscr{T}_U$. По предложению 4, множество $\mathfrak{B}$ *пересечений всевозможных конечных семейств* множеств из $\mathfrak{S}$ образует *базис* топологии $\mathscr{T}_0$. $\mathfrak{S}$ называют *системой образующих* топологии $\mathscr{T}_0$.

III. *Произведение топологий.* Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических пространств; слабейшую из топологий в произведении $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$, при которых непрерывны все *проекции* $\mathrm{pr}_\iota : X \to X_\iota$, называют *произведением топологий* пространств X_ι; мы изучим ее подробнее в § 4.

4. Финальные топологии

Предложение 6. *Пусть X — множество, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство топологических пространств, f_ι для каждого $\iota\in I$ — отображение Y_ι в X. Пусть $\mathfrak{D}$ — множество всех подмножеств U в X таких, что $f_\iota^{-1}(U)$ открыто в Y_ι для любого $\iota\in I$; $\mathfrak{D}$ есть множество всех открытых множеств для топологии $\mathscr{T}$ в X, являющейся финальной структурой в X относительно семейства (f_ι)* (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 5) *и, в частности, сильнейшей из тех топологий в X, при которых все f_ι непрерывны. Другими словами, для того чтобы отображение g множества X, наделенного топологией $\mathscr{T}$, в топологическое пространство Z было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы каждое из отображений $g\circ f_\iota$ было непрерывно.*

Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{D}$ удовлетворяет аксиомам (O_I) и (O_{II}) (Теор. множ., Сводка результ., § 4, формулы (34) и (46)); докажем последнее утверждение предложения, что повлечет остальные в силу общих свойств финальных структур (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 5, критерий CST 18). Из определения $\mathfrak{D}$ явствует, что при наделении X топологией $\mathscr{T}$ все f_ι непрерывны (теорема 1); поэтому, если g непрерывно, то непрерывны и $g\circ f_\iota$ (теорема 2). Обратно, предположим, что все $g\circ f_\iota$ непрерывны, и пусть V — открытое множество в Z; по предположению множество $f_\iota^{-1}(g^{-1}(V))$ открыто в Y_ι при любом $\iota\in I$; следовательно, $g^{-1}(V)\in\mathfrak{D}$, что и завершает доказательство.

Следствие. *При условиях предложения* 6, *для того чтобы множество F в X было замкнуто в топологии $\mathscr{T}$, необходимо и достаточно, чтобы $f_\iota^{-1}(F)$ было замкнуто в Y_ι при любом $\iota\in I$.*

Это получается из определения открытых множеств топологии $\mathscr{T}$ переходом к дополнениям.

Общие свойства финальных структур (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 5, критерий CST 19) влекут следующее свойство *транзитивности* (и непосредственно очевидное):

Предложение 7. *Пусть X — множество, $(Z_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство топологических пространств, $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ — разбиение I и $(Y_\lambda)_{\lambda\in L}$ —*

семейство множеств, имеющее L своим множеством индексов. Пусть, наконец, h_λ для каждого $\lambda \in L$ — отображение Y_λ в X, а $g_{\lambda\iota}$ для любых $\lambda \in L$ и $\iota \in J_\lambda$ — отображение Z_ι в Y_λ; положим тогда $f_\iota = h_\lambda \circ g_{\lambda\iota}$. Наделим каждое Y_λ сильнейшей из топологий, при которых непрерывны все $g_{\lambda\iota}$ ($\iota \in J_\lambda$). Тогда сильнейшая из топологий в X, при которых непрерывны все f_ι, совпадает с сильнейшей из топологий, при которых непрерывны все h_λ.

Примеры. I. *Фактортопология.* Пусть X — топологическое пространство, R — отношение эквивалентности в X, $Y = X/R$ — фактормножество X по R и φ: $X \to Y$ — каноническое отображение. Сильнейшая из топологий в Y, при которых φ непрерывно, называется *фактортопологией* топологии пространства X по отношению R; мы изучим ее подробнее в § 3.

II. *Нижняя грань множества топологий.* Всякое семейство $(\mathscr{T}_\iota)_{\iota \in I}$ топологий в множестве X обладает *нижней гранью* $\mathscr{T}$ в множестве всех топологий в X; другими словами, $\mathscr{T}$ есть *сильнейшая* из топологий, *мажорируемых* всеми $\mathscr{T}_\iota$. В самом деле, достаточно применить предложение 6, взяв за Y_ι множество X, наделенное топологией $\mathscr{T}_\iota$, а за f_ι — тождественное отображение $Y_\iota \to X$. Если $\mathfrak{O}_\iota$ — множество всех открытых множеств в X, наделенном топологией $\mathscr{T}_\iota$, то $\bigcap_{\iota \in I} \mathfrak{O}_\iota$ есть множество всех открытых множеств в X, наделенном топологией $\mathscr{T}$. $\mathscr{T}$ называют также *пересечением* топологий $\mathscr{T}_\iota$.

III. *Сумма топологических пространств.* Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических пространств, X — *сумма множеств* X_ι (Теор. множ., гл. II, § 4, определение 8), j_ι для каждого $\iota \in I$ — каноническое (инъективное) отображение X_ι в X. Сильнейшая топология $\mathscr{T}$ в X, оставляющая непрерывными все j_ι, называется *суммой топологий* пространств X_ι, а X, наделенное этой топологией, — *суммой* топологических пространств X_ι. Отождествим каждое X_ι с его образом в X относительно j_ι; для того чтобы множество $A \subset X$ было открытым (соотв. замкнутым) в топологии $\mathscr{T}$, необходимо и достаточно, чтобы каждое из множеств $A \cap X_\iota$ было открытым (соотв. замкнутым) в X_ι. В частности, каждое из X_ι *открыто-замкнуто.*

IV. Следующее предложение обобщает ситуацию примера III:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть X — множество, $(X_\lambda)_{\lambda\in L}$ — семейство его подмножеств и каждое X_λ наделено топологией $\mathscr{T}_\lambda$ так, что для любой пары индексов (λ, μ):*

1° *$X_\lambda \cap X_\mu$ открыто* (соотв. *замкнуто*) *в каждой из топологий $\mathscr{T}_\lambda$, $\mathscr{T}_\mu$;*

2° *$\mathscr{T}_\lambda$ и $\mathscr{T}_\mu$ индуцируют в $X_\lambda \cap X_\mu$ совпадающие топологии.*

Пусть $\mathscr{T}$ — сильнейшая из топологий в X, при которых все инъекции j_λ: $X_\lambda \to X$ непрерывны. Тогда при любом $\lambda \in L$ множество X_λ открыто (соотв. *замкнуто*) *в X, наделенном топологией $\mathscr{T}$, и топология, которую $\mathscr{T}$ индуцирует в X_λ, совпадает с $\mathscr{T}_\lambda$.*

В силу предложения 6 и его следствия все сводится к доказательству равносильности для любого λ и любого множества $A_\lambda \subset X_\lambda$ следующих предложений:

(I) A_λ открыто (соотв. замкнуто) в топологии $\mathscr{T}_\lambda$;

(II) $A_\lambda \cap X_\mu$ открыто (соотв. замкнуто) в топологии $\mathscr{T}_\mu$ при любом $\mu \in L$.

Но ясно, что (II) влечет (I), если положить $\mu = \lambda$. Обратно, если (I) выполнено, то $A_\lambda \cap X_\mu$ открыто (соотв. замкнуто) в $X_\lambda \cap X_\mu$, наделенном топологией $\mathscr{T}_{\lambda\mu}$, индуцируемой $\mathscr{T}_\lambda$; но $\mathscr{T}_{\lambda\mu}$ является также топологией, индуцируемой $\mathscr{T}_\mu$ в $X_\lambda \cap X_\mu$, и потому $A_\lambda \cap X_\mu$ будет также пересечением $X_\lambda \cap X_\mu$ с некоторым открытым (соотв. замкнутым) в топологии $\mathscr{T}_\mu$ множеством B_μ из X_μ; а поскольку $X_\lambda \cap X_\mu$ открыто (соотв. замкнуто) в топологии $\mathscr{T}_\mu$, то же верно для $A_\lambda \cap X_\mu$, что и завершает доказательство.

Отметим, что если объединение множеств X_λ отлично от X, то топология, которую $\mathscr{T}$ индуцирует в $\complement(\bigcup_{\lambda\in L} X_\lambda)$, *дискретна*. В самом деле, если $x \in X$ не принадлежит ни одному из X_λ, то $\{x\} \cap X_\lambda = \varnothing$ открыто в $\mathscr{T}_\lambda$ при любом λ и, следовательно, $\{x\}$ открыто в $\mathscr{T}$.

5. *Склеивание топологических пространств*

Пусть $(X_\lambda)_{\lambda\in L}$ — семейство множеств и X — его *сумма* (Теор. множ., гл. II, § 4, определение 8); отождествим каждое X_λ с его образом в X относительно канонической инъекции j_λ: $X_\lambda \to X$.

Рассмотрим отношение эквивалентности R в X, обладающее тем свойством, что *каждый класс эквивалентности по R имеет в*

каждом X_λ не более одного элемента; пусть $A_{\lambda\mu}$ для каждой пары индексов (λ, μ) означает подмножество в X_λ, образованное теми элементами x, для которых существует элемент $y \in X_\mu$, принадлежащий одному классу эквивалентности с x. Ясно, что каждой точке $x \in A_{\lambda\mu}$ соответствует, и притом единственная, точка $y \in A_{\mu\lambda}$, конгруэнтная $x \bmod R$. Определяемые так отображения $h_{\mu\lambda}: A_{\lambda\mu} \to A_{\mu\lambda}$ удовлетворяют тогда следующим условиям:

(I) $h_{\lambda\lambda}$ для каждого $\lambda \in L$ есть тождественное отображение множества $A_{\lambda\lambda} = X_\lambda$ на себя;

(II) $h_{\mu\lambda}(x) \in A_{\mu\nu}$ и

$$h_{\nu\lambda}(x) = h_{\nu\mu}(h_{\mu\lambda}(x)) \tag{1}$$

для каждой тройки индексов (λ, μ, ν) из L и каждого $x \in A_{\lambda\mu} \cap A_{\lambda\nu}$.

Обратно, пусть для каждой пары индексов (λ, μ) заданы множество $A_{\lambda\mu} \subset X_\lambda$ и отображение $h_{\mu\lambda}: A_{\lambda\mu} \to A_{\mu\lambda}$, удовлетворяющие условиям (I) и (II). Из условия (II), примененного к тройкам (λ, μ, λ) и (μ, λ, μ), вытекает прежде всего, что $h_{\lambda\mu} \circ h_{\mu\lambda}$ (соотв. $h_{\mu\lambda} \circ h_{\lambda\mu}$) есть сужение $h_{\lambda\lambda}$ (соотв. $h_{\mu\mu}$) на $A_{\lambda\mu}$ (соотв. $A_{\mu\lambda}$), откуда в силу (I) следует, что $h_{\lambda\mu}$ и $h_{\mu\lambda}$ — взаимно обратные *биекции*. Пусть тогда $R\{x, y\}$ означает отношение «существуют λ, μ такие, что $x \in A_{\lambda\mu}$, $y \in A_{\mu\lambda}$ и $y = h_{\mu\lambda}(x)$». Из предыдущего и (I) вытекает, что R *рефлексивно* и *симметрично*; с другой стороны, если $x \in A_{\lambda\mu}$, $y = h_{\mu\lambda}(x) \in A_{\mu\lambda} \cap A_{\mu\nu}$ и $z = h_{\nu\mu}(y)$, то $x = h_{\lambda\mu}(y)$, откуда, согласно (II), $x \in A_{\lambda\mu} \cap A_{\lambda\nu}$; тем самым соотношение (1) доказывает, что R *транзитивно*, и, таким образом, R есть отношение эквивалентности в X. Вместе с тем из (I) и определения R вытекает, что каждый класс эквивалентности по R имеет не более одного элемента в каждом X_λ и что $A_{\lambda\mu}$ есть множество тех $x \in X_\lambda$, для которых существует $y \in X_\mu$, конгруэнтное $x \bmod R$. Говорят, что фактормножество X/R получено *склеиванием множеств X_λ по множествам $A_{\lambda\mu}$ посредством биекций $h_{\mu\lambda}$*. Сужение канонического отображения $\varphi: X \to X/R$ на каждое X_λ есть *биекция* X_λ на $\varphi(X_\lambda)$.

Предположим теперь, что каждое X_λ есть *топологическое пространство*, и пусть $\mathscr{T}_\lambda$ — его топология. Наделим множество X/R сильнейшей топологией $\mathscr{T}$, оставляющей непрерывными все отображения $\varphi \circ j_\lambda: X_\lambda \to X/R$, или, что равносильно этому,

наделим X *суммой* топологий $\mathscr{T}_\lambda$, а X/R — ее фактортопологией по отношению R. Говорят, что топологическое пространство X/R получается *склеиванием топологических пространств* X_λ по множествам $A_{\lambda\mu}$ посредством биекций $h_{\mu\lambda}$. Таким образом, *открытые* (соотв. *замкнутые*) множества в X/R — это канонические образы множеств $B \subset X$, *насыщенных* по R и таких, что $B \cap X_\lambda$ *открыто* (соотв. *замкнуто*) в X_λ для каждого $\lambda \in L$.

Поскольку сужение φ на каждое X_λ есть биекция на множество $X'_\lambda = \varphi(X_\lambda) \subset X/R$, топология $\mathscr{T}_\lambda$ посредством этой биекции переносится в X'_λ, так что X'_λ наделяется некоторой топологией $\mathscr{T}'_\lambda$, а топология $\mathscr{T}$ в X/R оказывается *сильнейшей* из оставляющих непрерывными все канонические инъекции $X'_\lambda \to X/R$. Вообще говоря, топология, которую $\mathscr{T}$ индуцирует в X'_λ, *мажорируется* топологией $\mathscr{T}'_\lambda$, но не совпадает с этой последней, даже когда все $h_{\mu\lambda}$ — гомеоморфизмы (§ 3, упражнение 15). Однако из предложения 8 вытекает, в предыдущих обозначениях:

Предложение 9. *Пусть все* $h_{\mu\lambda}$ *— гомеоморфизмы, а каждое* $A_{\lambda\mu}$ *открыто* (соотв. *замкнуто*) *в* X_λ; *тогда каждое* $\varphi(X_\lambda)$ *открыто* (соотв. *замкнуто*) в X/R *и сужение* φ *на* X_λ *есть гомеоморфизм* X_λ *на подпространство* $\varphi(X_\lambda)$ *пространства* X/R.

Упражнения

1) Пусть f — отображение топологического пространства X в топологическое пространство X'; следующие свойства равносильны:

а) f непрерывно;

б) $\overline{f^{-1}(A')} \subset (f^{-1}(A'))^\circ$ для каждого $A' \subset X'$;

в) $\overline{f^{-1}(A')} \subset f^{-1}(\overline{A'})$ для каждого $A' \subset X'$.

Показать на примере, что для непрерывного f множества $\overline{f^{-1}(A')}$ и $f^{-1}(\overline{A'})$ могут быть различны.

2) Пусть X и X' — упорядоченные множества, наделенные каждое своей правой топологией (§ 1, упражнение 2); для того чтобы отображение $f\colon X \to X'$ было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы оно было возрастающим.

3) Пусть X и X' — топологические пространства и f — биекция X на X'; для того чтобы f было гомеоморфизмом X на X', необходимо и

достаточно, чтобы топология в X' была сильнейшей из всех топологий в X', при которых f непрерывно.

4) В упорядоченном множестве X верхней гранью правой и левой топологий (§ 1, упражнение 2) служит дискретная топология; если X — фильтрующееся (вправо или влево), то нижняя грань этих двух топологий есть слабейшая топология в X.

5) Обозначим через $\mathscr{T}_0(X)$ (соотв. $\mathscr{T}_+(X)$, $\mathscr{T}_-(X)$) топологию, порождаемую в упорядоченном множестве X множеством всех открытых (соотв. полуоткрытых справа, полуоткрытых слева) интервалов, ограниченных или нет.

а) Показать, что если X совершенно упорядоченно, то открытые (соотв. полуоткрытые справа, полуоткрытые слева) интервалы образуют базис топологии $\mathscr{T}_0(X)$ (соотв. $\mathscr{T}_+(X)$, $\mathscr{T}_-(X)$); замкнутые интервалы являются замкнутыми множествами в каждой из этих трех топологий.

б) В совершенно упорядоченном множестве X топология $\mathscr{T}_+(X)$ мажорирует правую топологию (§ 1, упражнение 2); топология $\mathscr{T}_-(X)$ мажорирует левую топологию; пересечением $\mathscr{T}_+(X)$ и $\mathscr{T}_-(X)$ служит $\mathscr{T}_0(X)$.

в) Пусть X — совершенно упорядоченное множество. Для того чтобы топология $\mathscr{T}_0(X)$ обладала счетным базисом, необходимо и достаточно существование такого счетного множества $D \subset X$, чтобы для каждого $x \in X$ и каждого интервала $]a, b[$, содержащего x, существовали $\alpha \in D$, $\beta \in D$ такие, что $a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b$. [Ср. гл. IV, 3-е изд., § 2, упражнение 11в.]

г) Если X — вполне упорядоченное множество (Теор. множ., гл. III, § 2), то топология $\mathscr{T}_+(X)$ — дискретная, а топологии $\mathscr{T}_0(X)$ и $\mathscr{T}_-(X)$ совпадают.

*6) Топология в множестве X называется *квазимаксимальной*, если она максимальна в множестве всех топологий, при которых X не имеет изолированных точек.

а) Показать равносильность следующих свойств топологии $\mathscr{T}$ в X: α) $\mathscr{T}$ квазимаксимальна; β) X, наделенное топологией $\mathscr{T}$, не имеет изолированных точек и всякое множество в X, не имеющее изолированных точек, открыто.

б) Пусть X — колмогоровское пространство (§ 1, упражнение 2), в котором всякое непустое открытое множество бесконечно. Показать, что в X существует квазимаксимальная топология, мажорирующая данную. [Показать, что множество топологий в X, при которых все непустые открытые множества бесконечны, индуктивно, и воспользоваться упражнением 2г § 1.]

*7) Для любого множества X обозначим через $\mathfrak{P}_0(X)$ множество всех его непустых подмножеств.

а) Пусть X — непустое топологическое пространство. Обозначим через $\mathscr{T}_\Omega$ (соотв. $\mathscr{T}_\Phi$) слабейшую из топологий в $\mathfrak{P}_0(X)$, обладающих тем свойством, что $\mathfrak{P}_0(A)$ открыто (соотв. замкнуто) в $\mathfrak{P}_0(X)$ для любого непустого открытого (соотв. замкнутого) множества A из X.

Показать, что вообще эти две топологии несравнимы и что отображение $x \mapsto \{x\}$ есть гомеоморфизм пространства X на подпространство пространства $\mathfrak{P}_0(X)$, наделенного любой из топологий $\mathscr{T}_\Omega$, $\mathscr{T}_\Phi$.

б) Пусть D — плотное множество в X; показать, что множество $\mathfrak{C}(D)$ всех непустых конечных подмножеств из D плотно в $\mathfrak{P}_0(X)$ для каждой из топологий $\mathscr{T}_\Omega$, $\mathscr{T}_\Phi$.

в) Топология $\mathscr{T}_\Omega$ мажорируется левой топологией в $\mathfrak{P}_0(X)$, упорядоченном отношением включения (§ 1, упражнение 2). Для того чтобы $A \in \mathfrak{P}_0(X)$ было изолированной точкой в топологии $\mathscr{T}_\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $A = \{x\}$, где x — изолированная точка в X; для того чтобы $A \in \mathfrak{P}_0(X)$ было изолированной точкой в топологии $\mathscr{T}_\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы X было дискретным конечным пространством и $A = X$.

г) Показать, что если $\mathfrak{P}_0(X)$ наделено топологией $\mathscr{T}_\Omega$ (соотв. $\mathscr{T}_\Phi$), а $\mathfrak{P}_0(X) \times \mathfrak{P}_0(X)$ — произведением $\mathscr{T}_\Omega$ (соотв. $\mathscr{T}_\Phi$) на себя, то отображение $(M, N) \mapsto M \cup N$ пространства $\mathfrak{P}_0(X) \times \mathfrak{P}_0(X)$ в $\mathfrak{P}_0(X)$ непрерывно.

д) Показать, что если $\mathfrak{P}_0(X)$ наделено топологией $\mathscr{T}_\Phi$, то отображение $M \mapsto \overline{M}$ непрерывно.

е) Пусть X и Y — топологические пространства, а $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Показать, что если $\mathfrak{P}_0(X)$ и $\mathfrak{P}_0(Y)$ наделены оба топологией $\mathscr{T}_\Omega$ или оба топологией $\mathscr{T}_\Phi$, то отображение $M \mapsto f(M)$ пространства $\mathfrak{P}_0(X)$ в $\mathfrak{P}_0(Y)$ непрерывно.

ж) Пусть X и Z — топологические пространства; для того чтобы отображение $f\colon Z \to \mathfrak{P}_0(X)$ было непрерывно, когда $\mathfrak{P}_0(X)$ наделено топологией $\mathscr{T}_\Omega$ (соотв. $\mathscr{T}_\Phi$), необходимо и достаточно, чтобы для каждого замкнутого (соотв. открытого) множества A из X множество тех $z \in Z$, для которых $f(z) \cap A \neq \varnothing$, было замкнуто (соотв. открыто) в Z.

*8) Пусть X — множество, $\mathfrak{c}$ — кардинальное число, либо бесконечное, либо равное 1. Множество частей X, составленное из X и тех $M \subset X$, для которых $\mathrm{Card}(M) < \mathfrak{c}$, есть множество всех замкнутых множеств в X, наделенном некоторой топологией $\mathscr{T}_\mathfrak{c}$; $\mathscr{T}_1$ — слабейшая топология, а если $\mathfrak{c} > \mathrm{Card}(X)$, то $\mathscr{T}_\mathfrak{c}$ — дискретная топология. Всякая перестановка множества X есть автоморфизм топологического пространства, получаемого наделением X топологией $\mathscr{T}_\mathfrak{c}$

Показать, что и, обратно, всякая топология $\mathscr{T}$ в X, при которой все перестановки множества X непрерывны, есть необходимо одна из топологий $\mathscr{T}_\mathfrak{c}$ [Пусть $\mathfrak{c}$ — наименьшее кардинальное число, такое, что $\mathrm{Card}(F) < \mathfrak{c}$ для всех замкнутых в $\mathscr{T}$ множеств F, отличных от X; заметить, что если X бесконечно и $\mathfrak{c} > \mathrm{Card}(X)$, то $\mathscr{T}$ — необходимо дискретная топология.]

9) а) Показать при условиях предложения 4, что слабейшая из топологий в X, при которых непрерывны все f_ι, есть также *сильнейшая* из топологий $\mathscr{T}$ в X, обладающих следующим свойством:

всякое отображение g топологического пространства Z в X (наделенное топологией $\mathscr{T}$), такое, что все $f_\iota \circ g$ непрерывны, непрерывно.

б) Показать при условиях предложения 6, что сильнейшая из топологий в X, при которых непрерывны все f_ι, есть также *слабейшая* из топологий $\mathscr{T}$ в X, обладающих следующим свойством: всякое отображение g пространства X (наделенного топологией $\mathscr{T}$) в топологическое пространство Z, такое, что все $g \circ f_\iota$ непрерывны, непрерывно.

10) Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое фильтрующееся по возрастанию множество топологий без изолированных точек в множестве X. Показать, что и верхняя грань множества $\mathfrak{M}$ в множестве всех топологий в X есть топология без изолированных точек.

*11) Топологическое пространство X называется *разрешимым*, если в нем существуют два взаимно дополнительных множества, каждое из которых всюду плотно.

а) Разрешимое топологическое пространство X не имеет изолированных точек и всякое его открытое подпространство разрешимо. Обратно, если $\mathfrak{B}$ — множество непустых открытых множеств из X такое, что всякое открытое подпространство $U \in \mathfrak{B}$ разрешимо и всякое непустое открытое множество в X содержит некоторое множество из $\mathfrak{B}$, то X разрешимо. [Рассмотреть *максимальное* семейство попарно не пересекающихся открытых множеств из $\mathfrak{B}$.]

б) Если колмогоровское пространство X разрешимо, то всякое непустое открытое множество в X бесконечно. [Использовать упражнение 2г § 1.]

в) Пусть X — такое топологическое пространство, что: 1° наименьшая мощность $\mathfrak{d}$ непустых открытых множеств в X бесконечна; 2° существует базис $\mathfrak{B}$ топологии в X, для которого $\mathrm{Card}(\mathfrak{B}) \leqslant \mathfrak{d}$. Показать, что X разрешимо. [Используя метод, примененный в упражнении 24а § 6 гл. III Теории множеств, построить с помощью трансфинитной индукции два всюду плотных в X множества без общих точек.] В частности, рациональная прямая разрешима.

г) Топологическое пространство X без изолированных точек называется *изодинным*, если $\mathrm{Card}(U) = \mathrm{Card}(X)$ для каждого непустого открытого множества U в X. В пространстве X без изолированных точек всякое непустое открытое множество содержит непустое изодинное открытое подпространство. Вывести отсюда, что если всякое изодинное открытое подпространство в X разрешимо, то X разрешимо.

§ 3. Подпространства; факторпространства

1. *Подпространства топологического пространства*

Пусть A — множество в топологическом пространстве X Мы определили *топологию*, *индуцируемую* в A топологией пространства X, как прообраз последней относительно канонической

инъекции $A \to X$ (§ 2, n° 3, пример I); это же выражается также следующим определением:

Определение 1. *Пусть A — множество в топологическом пространстве X. Топологией, индуцируемой в A топологией пространства X, называется топология, открытыми множествами которой служат следы на A открытых множеств из X. Множество A, наделенное этой топологией, называется подпространством пространства X.*

Пример. Топология рациональной прямой индуцирует в множестве $\mathbf{Z}$ всех рациональных целых чисел *дискретную* топологию, ибо следом открытого интервала $\left]n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right[$ на $\mathbf{Z}$ является множество $\{n\}$.

Из предложения 5 § 2 (или прямо из определения 1) следует, что если $B \subset A \subset X$, то *подпространство B пространства X* совпадает с *подпространством B подпространства A пространства X* (*транзитивность* индуцированных топологий). Если $\mathfrak{S}$ — система образующих (соотв. базис) топологии пространства X (§ 2, n° 3, пример II), то ее след $\mathfrak{S}_A$ на A есть система образующих (соотв. базис) индуцированной топологии в A.

Во всех вопросах, где фигурируют точки или подмножества из A, надо тщательно различать их свойства как точек (соотв. подмножеств) пространства X от их свойств как точек (соотв. подмножеств) подпространства A. Это различение достигается использованием выражений «в A», «по отношению к A» или «относительно A» для указания свойств второй категории (иногда в противовес выражениям «в X», «по отношению к X», «относительно X»).

Множество, *открытое в подпространстве A*, не является непременно *открытым в X*: *для того чтобы любое открытое множество в A было открытым в X, необходимо и достаточно, чтобы A было открытым в X*. В самом деле, условие необходимо, ибо A открыто по отношению к A; оно достаточно в силу (O_{II}) и определения 1.

Замкнутые множества *в A* — это *следы на A замкнутых множеств из X* (§ 2, n° 3, пример I); как и выше, убеждаемся, что *для того, чтобы любое замкнутое множество в A было замкнутым в X, необходимо и достаточно, чтобы A было замкнутым в X.*

Окрестности точки $x \in A$ *относительно* A — это *следы на* A *окрестностей* x *относительно* X; для того чтобы всякая окрестность точки x относительно A была окрестностью точки x относительно X, необходимо и достаточно, чтобы A было *окрестностью точки* x *в* X.

Предложение 1. *Если* A *и* B — *подмножества топологического пространства* X, *причем* $B \subset A$, *то замыкание множества* B *в подпространстве* A *есть след на* A *замыкания* $\overline{B}$ *множества* B *в* X.

В самом деле, всякая окрестность точки $x \in A$ в A имеет вид $V \cap A$, где V — окрестность точки x в X. Так как $V \cap B = (V \cap A) \cap B$, то для того чтобы x было точкой прикосновения множества B в A, необходимо и достаточно, чтобы x было точкой прикосновения множества B в X.

Следствие. *Для того чтобы подмножество* B *множества* A *было плотно относительно* A, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{B} = \overline{A}$ *в* X (*или, что сводится к тому же, чтобы* $A \subset \overline{B}$).

Отсюда заключаем, что если A, B, C — множества в X такие, что $A \supset B \supset C$ и B плотно относительно A, а C плотно относительно B, то C плотно относительно A (*транзитивность* плотности). В самом деле, тогда $\overline{A} = \overline{B} = \overline{C}$ в X.

Предложение 2. *Пусть* A — *всюду плотное подпространство топологического пространства* X; *тогда для любой точки* $x \in A$ *и любой ее окрестности* V *в* A *замыкание* $\overline{V}$ *последней в* X *есть окрестность точки* x *в* X.

В самом деле, V содержит след $U \cap A$ открытого множества U из X, содержащего x; следовательно, $\overline{V}$ содержит $U \cap \overline{A} = U$ (§ 1, предложение 5).

Предложение 3. *Пусть* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство подмножеств топологического пространства* X, *обладающее одним из следующих свойств*:

а) *внутренности множеств* A_ι *образуют покрытие пространства* X;

б) $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *есть локально конечное замкнутое покрытие* (§ 1, n° 5) *пространства* X.

При этих условиях для того, чтобы множество $B\subset X$ *было открытым* (соотв. *замкнутым*) *в* X, *необходимо и достаточно, чтобы каждое из множеств* $B\cap A_\iota$ *было открытым* (соотв. *замкнутым*) *в* A_ι.

Необходимость условий очевидна. Для доказательства достаточности предположим сначала, что выполнено условие а). Поскольку $(\complement B)\cap A_\iota = A_\iota - (B\cap A_\iota)$, можно, по двойственности, ограничиться рассмотрением того случая, когда каждое $B\cap A_\iota$ *открыто* относительно A_ι; тогда $B\cap \mathring{A}_\iota$ открыто в $\mathring{A}_\iota$ для любого $\iota\in I$ и, следовательно, открыто в X. Так как по предположению $B=\bigcup_\iota (B\cap \mathring{A}_\iota)$, то B открыто в X.

Предположим теперь, что выполнено условие б). По двойственности можно снова ограничиться рассмотрением случая, когда каждое из $B\cap A_\iota$ *замкнуто* относительно A_ι; тогда $B\cap A_\iota$ замкнуто в X. А поскольку семейство $(B\cap A_\iota)$ локально конечно и $B=\bigcup_\iota (B\cap A_\iota)$, то B замкнуто в X в силу предложения 4 § 1.

Замечание. Пусть $(U_\iota)_{\iota\in I}$ — *открытое* покрытие топологического пространства X и $\mathfrak{B}_\iota$ для любого $\iota\in I$ — *базис* топологии подпространства U_ι пространства X. Ясно, что $\mathfrak{B}=\bigcup_{\iota\in I}\mathfrak{B}_\iota$ есть *базис* топологии пространства X.

2. *Непрерывность относительно подпространства*

Пусть X, Y — топологические пространства, f — отображение X в Y, B — множество в Y, содержащее $f(X)$. Определение индуцированной топологии как инициальной топологии (§ 2, предложение 4) показывает, что для непрерывности f в точке $x\in X$ необходимо и достаточно, чтобы отображение пространства X в *подпространство* B пространства Y, имеющее тот же график, что и f, было непрерывно в точке x.

Пусть теперь A — множество в X; если f непрерывно в точке $x\in A$ (соотв. непрерывно в X), то его *сужение* $f|A$ по предложению 2

§ 2 есть отображение подпространства A в Y, непрерывное в точке x (соотв. непрерывное в A). Иногда говорят, что отображение $f: X \to Y$ *непрерывно относительно* A *в точке* $x \in A$ (соотв. *непрерывно относительно* A), если его сужение $f|A$ непрерывно в точке x (соотв. непрерывно в A).

Заметим, что $f|A$ может быть непрерывно, хотя бы f не было непрерывным ни в одной точке из X; пример этому доставляет характеристическая функция φ_A множества A, всюду плотного в X вместе со своим дополнением (§ 2, упражнение 11): рассматриваемая как отображение X в дискретное пространство $\{0, 1\}$, φ_A не непрерывна ни в одной точке из X, но сужение φ_A на A есть постоянная, и, следовательно, оно непрерывно.

Если A — окрестность точки $x \in A$ в X и $f: X \to Y$ таково, что $f|A$ непрерывно в точке x, то и f непрерывно в точке x, ибо всякая окрестность точки x относительно A будет окрестностью x относительно X (*локальный* характер непрерывности).

Предложение 4. *Пусть* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство подмножеств топологического пространства* X, *внутренности которых образуют открытое покрытие последнего, или которое является локально конечным замкнутым покрытием пространства* X. *Пусть* f — *отображение* X *в топологическое пространство* X'. *Если сужение* f *на каждое из подпространств* A_ι *непрерывно, то* f *непрерывно.*

В самом деле, пусть F' — замкнутое множество в X' и $F = \overline{f}^{-1}(F')$. Тогда $F \cap A_\iota$ замкнуто в A_ι для каждого $\iota \in I$ (§ 2, теорема 1); следовательно, по предложению 3, F замкнуто в X и справедливость утверждения следует из теоремы 1 § 2.

3. *Локально замкнутые подпространства*

Определение 2. *Подмножество* L *топологического пространства* X *называется локально замкнутым в точке* $x \in L$, *если существует такая окрестность* V *точки* x *в* X, *что* $L \cap V$ *замкнуто относительно подпространства* V. L *называется локально замкнутым в* X, *если оно локально замкнуто в каждой своей точке.*

Замечание. Пусть F — такое множество в X, что *любая точка* x *из* X обладает окрестностью V в X, для которой $V \cap F$ замкнуто относительно подпространства V; из предложения 3 вытекает тогда,

что F *замкнуто* в X. Напротив, из нижеследующего предложения 5 тотчас следует, что, вообще говоря, существуют множества, локально замкнутые, но не замкнутые в X.

Предложение 5. *Для подмножества L топологического пространства X следующие условия равносильны*:

а) *L локально замкнуто*;

б) *L есть открытое подмножество своего замыкания $\overline{L}$ в X*;

в) *L есть пересечение открытого и замкнутого подмножеств пространства X.*

Очевидно, б) влечет в), поскольку L есть тогда пересечение $\overline{L}$ с открытым подмножеством пространства X; в) влечет а) в силу определения 2. Наконец, а) влечет б): в самом деле, тогда каждая точка $x \in L$ обладает открытой окрестностью U, для которой $U \cap L$ замкнуто в U; поэтому $U \cap \overline{L} = U \cap L$, а это показывает, что точка x — внутренняя к L в подпространстве $\overline{L}$, так что L открыто в $\overline{L}$.

Следствие. *Пусть $f: X \to X'$ — непрерывное отображение*; *тогда прообраз $f^{-1}(L')$ любого локально замкнутого множества L' из X' локально замкнут в X.*

Это непосредственно следует из предыдущего предложения 5 и теоремы 1 § 2.

4. Факторпространства

Определение 3. *Пусть R — отношение эквивалентности в топологическом пространстве X. Факторпространством X по R называют фактормножество X/R, наделенное фактортопологией пространства X по отношению R* (§ 2, n° 4, пример I).

В дальнейшем при рассмотрении X/R как топологического пространства всюду, где не оговорено противное, будет подразумеваться, что речь идет о факторпространстве X по R. Часто говорят, что это топологическое пространство получено путем *отождествления* тех точек пространства X, которые принадлежат одному и тому же классу эквивалентности по R.

Пусть φ — каноническое отображение $X \to X/R$. По определению (§ 2, предложение 6 и его следствие) *открытые* (соотв.

замкнутые) множества в X/R — это множества A, для которых $\varphi^{-1}(A)$ *открыто* (соотв. *замкнуто*) в X; иначе говоря, открытые (соотв. замкнутые) множества в X/R находятся во взаимно однозначном соответствии с открытыми (соотв. замкнутыми) множествами в X, *насыщенными* по R, и являются каноническими образами этих множеств.

Предложение 6. *Пусть R — отношение эквивалентности в топологическом пространстве X и φ — каноническое отображение X на X/R; для того чтобы отображение f пространства X/R в топологическое пространство Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $f \circ \varphi$ было непрерывно на X.*

Это не что иное, как частный случай предложения 6 § 2, выражающий, что фактортопология есть *финальная* топология относительно отображения φ.

Предложение 6 показывает, что существует каноническое взаимно однозначное соответствие между непрерывными отображениями X/R в Y и непрерывными отображениями X в Y, *постоянными на каждом классе эквивалентности по R.*

Пример. °Рассмотрим на числовой прямой $\mathbf{R}$ отношение эквивалентности $x \equiv y \pmod 1$; факторпространство $\mathbf{R}$ по этому отношению называется *одномерным тором* и обозначается $\mathbf{T}$. Класс эквивалентности точки $x \in \mathbf{R}$ состоит из всевозможных точек $x+n$, где n пробегает множество $\mathbf{Z}$ рациональных целых чисел. По предложению 6 существует взаимно однозначное соответствие между непрерывными функциями на $\mathbf{T}$ и *периодическими* функциями с периодом 1 на $\mathbf{R}$. В § 1 гл. V мы вернемся к этому важному примеру.°

Следствие. *Пусть X, Y — топологические пространства, R* (соотв. *S*) *— отношение эквивалентности в X* (соотв. *Y*), *$f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, согласующееся с отношениями эквивалентности R и S* (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 8); *тогда отображение $g\colon X/R \to Y/S$, полученное из f факторизацией* (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 8), *непрерывно.*

Это — частный случай общего свойства факторструктур (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 6, критерий CST 20).

Предложение 7 (транзитивность факторпространств). *Пусть R и S — отношения эквивалентности в топологическом простран-*

стве X, причем R влечет S, и S/R — факторотношение эквивалентности в факторпространстве X/R (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 9). *Тогда биективное каноническое отображение $(X/R)/(S/R) \to X/S$ есть гомеоморфизм.*

Это — частный случай транзитивности финальных топологий (§ 2, предложение 7; ср. Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 6, критерий CST 21).

5. Каноническое разложение непрерывного отображения

Пусть X, Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, R — отношение эквивалентности $f(x) = f(y)$ в X. Рассмотрим *каноническое разложение*

$$f\colon X \xrightarrow{\varphi} X/R \xrightarrow{g} f(X) \xrightarrow{\psi} Y,$$

где φ — (сюръективное) каноническое отображение пространства X на факторпространство X/R, ψ — каноническая инъекция подпространства $f(X)$ в Y и g — биекция, ассоциированная с f (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 3). Очевидно, g непрерывно (по предложению 6), что, впрочем, является частным случаем общего результата о факторструктурах (ср. Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 6). Но биекция g *не обязательно гомеоморфизм.*

Предложение 8. *Пусть $f = \psi \circ g \circ \varphi$ — каноническое разложение непрерывного отображения $f\colon X \to Y$, R — отношение эквивалентности $f(x) = f(y)$. Следующие три условия равносильны:*

а) *g есть гомеоморфизм X/R на $f(X)$.*

б) *Образ при отображении f всякого насыщенного по R открытого множества есть открытое множество в подпространстве $f(X)$.*

в) *Образ при отображении f всякого насыщенного по R замкнутого множества есть замкнутое множество в подпространстве $f(X)$.*

В самом деле, условие б) (соотв. в)) выражает, что образ при отображении g всякого открытого (соотв. замкнутого) множества из X/R есть открытое (соотв. замкнутое) множество в $f(X)$.

Пример. Пусть X — топологическое пространство, $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *покрытие* X, Y — *сумма* подпространств X_ι пространства X, так что

существуют разбиение $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ пространства Y на открыто-замкнутые подпространства и для каждого $\iota\in I$ — гомеоморфизм $f_\iota\colon Y_\iota\to X_\iota$. Пусть $f\colon Y\to X$ — непрерывное отображение, совпадающее с f_ι на Y_ι для любого $\iota\in I$, и R — отношение эквивалентности $f(x)=f(y)$; таким образом, факторпространство Y/R получается «склеиванием» пространств Y_ι (§ 2, n° 5). Рассмотрим биекцию $g\colon Y/R\to X$, ассоциированную с f; вообще говоря, g не есть гомеоморфизм, как показывает пример, где все X_ι одноточечны, а X не дискретно. Однако если внутренности множеств X_ι образуют покрытие X, или (X_ι) — локально конечное замкнутое покрытие X, то g — гомеоморфизм; действительно, для любого открытого множества U из Y, насыщенного по R, и любого $\iota\in I$ пересечение $f(U)\cap X_\iota=f_\iota(U\cap Y_\iota)$ открыто в X_ι, так что справедливость утверждения вытекает из предложения 3.

Следующее предложение дает простое *достаточное* условие для того, чтобы g было гомеоморфизмом:

Предложение 9. *Пусть* $f\colon X\to Y$ — *непрерывное сюръективное отображение*, R — *отношение эквивалентности* $f(x)=f(y)$. *Если существует непрерывное сечение* $s\colon Y\to X$, *ассоциированное с* f (Теор. множ., гл. II, § 3, определение 11), *то отображение* $g\colon X/R\to Y$, *ассоциированное с* f, *есть гомеоморфизм, а* s — *гомеоморфизм* Y *на подпространство* $s(Y)$ *пространства* X.

В самом деле, если $\varphi\colon X\to X/R$ — каноническое отображение, то g и $\varphi\circ s$ биективны, непрерывны и взаимно обратны; точно так же s и сужение f на $s(Y)$ непрерывны, биективны и взаимно обратны.

Если R — отношение эквивалентности в топологическом пространстве X и $\varphi\colon X\to X/R$ — каноническое отображение, то всякое ассоциированное с φ *непрерывное сечение* $s\colon X/R\to X$ называется также *непрерывным сечением* пространства X по R (ср. Теор. множ., глава II, § 6, n° 2); тогда подпространство $s(X/R)$ пространства X гомеоморфно X/R. Отметим, что задание $s(X/R)$ полностью определяет s; допуская вольность, часто говорят еще для краткости, что $s(X/R)$ есть (непрерывное) *сечение* пространства X по R.

Отметим, что непрерывное сечение топологического пространства по отношению эквивалентности не обязательно существует (упражнение 12).

6. *Факторпространство подпространства*

Пусть X — топологическое пространство, A — его подпространство, R — отношение эквивалентности в X, f — каноническое отображение $X \to X/R$ и g — его сужение на A. Отношение эквивалентности $g(x)=g(y)$ в A есть не что иное, как отношение R_A, *индуцированное* отношением R в A (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 5). Пусть $g=\psi \circ h \circ \varphi$—каноническое разложение g, так что, обозначая через j каноническую инъекцию A в X, имеем коммутативную диаграмму *)

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A/R_A & \xrightarrow{h} & f(A) & \xrightarrow{\psi} & X/R \\ & {\scriptstyle j}\searrow & & & & \nearrow{\scriptstyle f} & \\ & & & X & & & \end{array} \qquad (1)$$

Предложение 10. *Каноническая биекция* h: $A/R_A \to f(A)$ *непрерывна. При этом следующие три свойства равносильны*:

а) h — *гомеоморфизм*;

б) *всякое открытое множество в* A, *насыщенное по* R_A, *есть след на* A *открытого множества из* X, *насыщенного по* R;

в) *всякое замкнутое множество в* A, *насыщенное по* R_A, *есть след на* A *замкнутого множества из* X, *насыщенного по* R.

Первая часть предложения очевидна (n° 5). Вторая следует из предложения 8: если B — открытое (соотв. замкнутое) множество в A, насыщенное по R_A, и $g(B)=f(B)$ есть след на $f(A)$ открытого (соотв. замкнутого) множества C из X/R, то B есть след на A открытого (соотв. замкнутого) множества $f^{-1}(C)$, насыщенного по R; и обратно, если B есть след на A открытого (соотв. замкнутого) множества D, насыщенного по R, то $f(B)$ есть след на $f(A)$ множества $f(D)$, которое открыто (соотв. замкнуто) в X/R.

Следствие 1. *Если* A — *открытое* (соотв. *замкнутое*) *множество в* X, *насыщенное по* R, *то каноническое отображение* h: $A/R_A \to f(A)$ *есть гомеоморфизм.*

---

*) Это выражение означает, что $f \circ j=\psi \circ h \circ \varphi$.

В самом деле, если A открыто (соотв. замкнуто) и насыщено по R, а $B \subset A$ открыто (соотв. замкнуто) в A и насыщено по R_A, то B открыто (соотв. замкнуто) в X и насыщено по R.

Следствие 2. *Если существует такое непрерывное отображение* u: $X \to A$, *что* $u(x)$ *конгруэнтно* $x \bmod R$ *для любого* $x \in X$, *то* $f(A) = X/R$ *и каноническое отображение* h: $A/R_A \to X/R$ *есть гомеоморфизм.*

В самом деле, так как всякий класс эквивалентности по R имеет непустое пересечение с A, то канонический образ A/R_A в X/R совпадает с X/R; с другой стороны, если U открыто в A и насыщено по R_A, то $u^{-1}(U)$ совпадает, в силу предположения, с множеством, получаемым насыщением U по R; поскольку u непрерывно, $u^{-1}(U)$ открыто в X (§ 2, теорема 1), чем в силу предложения 10 следствие доказано.

Пример. °Обозначим через R отношение эквивалентности $x \equiv y \pmod 1$ на числовой прямой $\mathbf{R}$ (n° 4, пример) и через A — замкнутый интервал $[0, 1]$; A содержит по крайней мере одну точку из всякого класса эквивалентности по R. Каноническое отображение A/R_A на тор $\mathbf{T}$ есть гомеоморфизм; в самом деле, пусть F — замкнутое множество в A (и тем самым в $\mathbf{R}$); чтобы насытить F по отношению R, нужно взять объединение замкнутых множеств $F+n$ (по всем $n \in \mathbf{Z}$), очевидно, образующих локально конечное семейство; их объединение, таким образом, замкнуто (§ 1, предложение 4), откуда и вытекает наше утверждение. Заметим, что A/R_A получается отождествлением в A точек 0 и 1.°

Упражнения

1) Пусть A, B — подмножества топологического пространства X, причем $A \supset B$. Показать, что:

а) Внутренность B относительно X содержится во внутренности B относительно подпространства A пространства X; дать пример, когда эти два множества различны.

б) Граница B относительно A содержится в следе на A границы B относительно X; дать пример, когда эти два множества различны.

2) Пусть A, B — произвольные подмножества топологического пространства X.

а) Показать, что след на A внутренности B относительно X содержится во внутренности $B \cap A$ относительно A; дать пример, когда эти два множества различны.

б) Показать, что след на A замыкания B в X содержит замыкание $B \cap A$ относительно A; дать пример, когда эти два множества различны.

3) Для того чтобы подпространство A топологического пространства X было дискретным, необходимо и достаточно, чтобы всякая точка из A была изолированной.

4) Пусть Y и Z — подпространства топологического пространства X, причем $X = Y \cup Z$. Положим $A = Y \cap \complement Z$, $B = Z \cap \complement Y$ и будем предполагать, что $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \varnothing$; если Y и Z оба открыты или оба замкнуты, это условие выполняется.

а) Показать, что для любого множества $M \subset X$ замыкание M в X есть объединение замыкания $M \cap Y$ относительно Y и замыкания $M \cap Z$ относительно Z. Вывести отсюда, что если $M \cap Y$ замкнуто (соотв. открыто) в Y и $M \cap Z$ замкнуто (соотв. открыто) в Z, то M замкнуто (соотв. открыто) в X.

б) Пусть f — отображение пространства X в топологическое пространство X'; показать, что если $f|Y$ и $f|Z$ непрерывны, то и f непрерывно.

5) Пусть Y и Z — подпространства топологического пространства X и $X = Y \cup Z$. Показать, что множество $M \subset Y \cap Z$, открытое (соотв. замкнутое) одновременно относительно Y и Z, открыто (соотв. замкнуто) в X.

6) Пусть A — локально замкнутое подпространство топологического пространства X. Показать, что множество открытых подмножеств U из X таких, что $A \subset U$ и A замкнуто в U, обладает наибольшим элементом, совпадающим с дополнением в X границы A относительно $\overline{A}$.

7) Показать на примерах, что в топологическом пространстве объединение двух локально замкнутых множеств и дополнение к локально замкнутому множеству не обязательно локально замкнуты.

8) Пусть A — подмножество упорядоченного множества X; топология, индуцируемая в A правой (соотв. левой) топологией из X (§ 1, упражнение 2), есть правая (соотв. левая) топология в множестве A, наделенном отношением порядка, индуцированным из X.

9) Пусть A — подмножество совершенно упорядоченного множества X.

а) Топология, индуцируемая в A топологией $\mathscr{T}_-(X)$ (соотв. $\mathscr{T}_+(X)$, $\mathscr{T}_0(X)$) (§ 2, упражнение 5), мажорирует топологию $\mathscr{T}_-(A)$ (соотв. $\mathscr{T}_+(A)$, $\mathscr{T}_0(A)$) в множестве A, наделенном индуцированным отношением порядка. Если A — интервал в X, то $\mathscr{T}_-(A)$ (соотв. $\mathscr{T}_+(A)$, $\mathscr{T}_0(A)$) индуцируется в A топологией $\mathscr{T}_-(X)$ (соотв. $\mathscr{T}_+(X)$, $\mathscr{T}_0(X)$).

б) Возьмем в качестве X лексикографическое произведение $\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$ (Теор. множ., гл. III, § 2, n° 6), а в качестве A его подмножество $\mathbf{Q} \times \{0\}$. Показать, что топология $\mathscr{T}_-(A)$ (соотв. $\mathscr{T}_+(A)$, $\mathscr{T}_0(A)$) в A слабее топологии, индуцируемой топологией $\mathscr{T}_-(X)$ (соотв. $\mathscr{T}_+(X)$, $\mathscr{T}_0(X)$).

10) Пусть A — непустое подпространство непустого топологического пространства X. Показать, что топология, индуцируемая в

$\mathfrak{P}_0(A)$ топологией $\mathscr{T}_\Omega$ (соотв. $\mathscr{T}_\Phi$), заданной в $\mathfrak{P}_0(X)$ (§ 2, упражнение 7), совпадает с топологией $\mathscr{T}_\Omega$ (соотв. $\mathscr{T}_\Phi$) в $\mathfrak{P}_0(A)$.

*11) Пусть X — топологическое пространство, $\mathscr{T}$ — его топология, A — всюду плотное подпространство в X. Показать, что множество тех топологий в X, мажорирующих $\mathscr{T}$, при которых A всюду плотно и которые индуцируют в A ту же топологию, что и $\mathscr{T}$, обладает по крайней мере одним максимальным элементом; он называется *A-максимальной* топологией. Для того чтобы топология $\mathscr{T}_0$ в X была A-максимальной, необходимо и достаточно, чтобы ее открытыми множествами были множества $M \subset X$, для которых $A \cap M$ плотно в M (в топологии $\mathscr{T}_0$) и открыто в A. Тогда подпространство $\mathbf{C}A$ дискретно в топологии, индуцируемой топологией $\mathscr{T}_0$, и замкнуто в X. Показать, что если топология $\mathscr{T}_0$ A-максимальна, а топология, индуцируемая ею в A, квазимаксимальна (§ 2, упражнение 6), то $\mathscr{T}_0$ квазимаксимальна.

°12) Пусть X — подпространство $[0, 1]$ числовой прямой $\mathbf{R}$ и S — отношение эквивалентности в X, классами которого служат $\{0, 1\}$ и множества $\{x\}$ $(0<x<1)$. Показать, что не существует непрерывных сечений X по S.

13) Пусть X — топологическое пространство, R и S — отношения эквивалентности в X, причем R влечет S. Показать, что если существуют непрерывное сечение X по R и непрерывное сечение X/R по S/R, то существует непрерывное сечение X по S.

14) Пусть X — пространство, являющееся суммой двух своих подпространств X_1, X_2, и X/R — пространство, получаемое склеиванием X_1 и X_2 по подпространствам A_1 из X_1 и A_2 из X_2 посредством гомеоморфизма h пространства A_1 на A_2. Показать, что канонические образы пространств X_1 и X_2 в X/R гомеоморфны соответственно X_1 и X_2.

°15) Рассмотрим в $\mathbf{R}$ подпространства $X_1 =]-1, 1[$, $X_2 =]-2, -1[$ и $X_3 =]1, 2]$; пусть X — их объединение, являющееся также суммой этих трех пространств. Пусть A_2 (соотв. A_3) — множество всех иррациональных чисел, содержащихся в X_2 (соотв. X_3); B_1 (соотв. B_2) — множество всех рациональных чисел, содержащихся в $]-1, 0]$ (соотв. в X_2); C_1 (соотв. C_3) — множество всех рациональных чисел, содержащихся в $]0, 1[$ (соотв. в X_3). Пусть X/R — пространство, получаемое склеиванием пространств X_i: 1° по A_2 и A_3 посредством гомеоморфизма $x \longmapsto x+3$; 2° по B_1 и B_2 посредством гомеоморфизма $x \longmapsto x-1$; 3° по C_1 и C_3 посредством гомеоморфизма $x \longmapsto x+1$. Показать, что канонический образ X_1 в X/R не гомеоморфен X_1. Факторпространство Y/R_Y, где $Y = X_1 \cup B_2 \cup C_3$ — насыщение X_1 по R, не гомеоморфно каноническому образу Y в X/R.

16) Пусть X — непустое топологическое пространство и R — отношение эквивалентности в X. Показать, что если рассматривать X/R как подмножество в $\mathfrak{P}_0(X)$, то фактортопология в X/R мажорируется топологиями, которые индуцируют в X/R топологии $\mathscr{T}_\Omega$ и $\mathscr{T}_\Phi$, заданные в $\mathfrak{P}_0(X)$ (§ 2, упражнение 7).

§ 4. Произведение топологических пространств

1. Произведение пространств

Определение 1. *Пусть дано семейство* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *топологических пространств; их произведением называют множество* $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$, *наделенное произведением топологий пространств* X_ι (§ 2, n° 3, пример III). X_ι ($\iota \in I$) *называют пространствами-сомножителями произведения* X.

В силу предложения 4 § 2 топология пространства X имеет *базисом* множество $\mathfrak{B}$ пересечений всевозможных *конечных* семейств множеств вида $\mathrm{pr}_\iota^{-1}(U_\iota)$, где U_ι — открытые множества из X_ι; эти пересечения являются не чем иным, как произведениями $\prod_{\iota \in I} A_\iota$, где A_ι *открыты* в X_ι для всех $\iota \in I$ и $A_\iota = X_\iota$ *для всех кроме конечного числа индексов* ι; мы будем называть эти произведения *элементарными множествами*.

Пусть $\mathfrak{B}_\iota$ для каждого $\iota \in I$ — базис топологии пространства X_ι; ясно, что элементарные множества $\prod_{\iota \in I} A_\iota$, в которых $A_\iota \in \mathfrak{B}_\iota$ для всех ι таких, что $A_\iota \neq X_\iota$, снова образуют *базис* топологии произведения. Те из этих множеств, которые содержат точку $x \in X$, образуют, таким образом, *фундаментальную систему окрестностей* x (§ 1, предложение 3).

Когда I — *конечное* множество, построение топологии произведения по топологиям сомножителей X_ι упрощается: элементарными множествами являются просто произведения $\prod_{\iota \in I} A_\iota$, где A_ι — произвольное открытое множество из X_ι для *каждого* $\iota \in I$ (см. упражнение 9).

Примеры. °Произведение $\mathbf{R}^n$ n экземпляров числовой прямой $\mathbf{R}$ называется *n-мерным числовым пространством*; $\mathbf{R}^2$ называется также *числовой плоскостью* (см. гл. VI, § 1). Так же, отправляясь от рациональной прямой $\mathbf{Q}$, определяют *n-мерное рациональное пространство* $\mathbf{Q}^n$ (*рациональную плоскость* для $n=2$).

Топология пространства $\mathbf{R}^n$ имеет своим базисом множество всевозможных произведений n открытых интервалов из $\mathbf{R}$ — произведений, называемых *открытыми n-мерными кирпичами*. Открытые

кирпичи, содержащие точку $x \in \mathbf{R}^n$, образуют фундаментальную систему ее окрестностей. Точно так же *замкнутыми n-мерными кирпичами* называются произведения n замкнутых интервалов из $\mathbf{R}$. Замкнутые кирпичи, имеющие x своей внутренней точкой, тоже образуют фундаментальную систему ее окрестностей. Аналогичные результаты имеют место для n-мерного рационального пространства.$_\circ$

Предложение 1. *Пусть* $f=(f_\iota)$ — *отображение топологического пространства* Y *в пространство* $X=\prod_{\iota \in I} X_\iota$. *Для того чтобы* f *было непрерывно в точке* $a \in Y$, *необходимо и достаточно, чтобы все* f_ι *были непрерывны в точке* a.

Поскольку $f_\iota = \mathrm{pr}_\iota \circ f$, это не что иное, как частный случай предложения 4 § 2.

Следствие 1. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейства топологических пространств с одним и тем же множеством индексов и* f_ι *для каждого* $\iota \in I$ *есть отображение* X_ι *в* Y_ι. *Для того чтобы отображение* f: $(x_\iota) \longmapsto (f_\iota(x_\iota))$ *пространства* $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ *в* $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$ (*произведение отображений* f_ι) *было непрерывно в точке* $a=(a_\iota)$, *необходимо и достаточно, чтобы* f_ι *было непрерывно в точке* a_ι *для каждого* $\iota \in I$.

В самом деле, f записывается в виде $x \longmapsto (f_\iota(\mathrm{pr}_\iota x))$, так что условие достаточно по предложению 1. Обратно, пусть $g_\varkappa$ для каждого $\varkappa \in I$ означает такое отображение $X_\varkappa$ в $\prod_{\iota \in I} X_\iota$, что $\mathrm{pr}_\varkappa(g_\varkappa(x_\varkappa)) = x_\varkappa$ и $\mathrm{pr}_\iota(g_\varkappa(x_\varkappa)) = a_\iota$ для $\iota \neq \varkappa$; $g_\varkappa$ непрерывно в точке $a_\varkappa$ в силу предложения 1; а так как $f_\varkappa = \mathrm{pr}_\varkappa \circ f \circ g_\varkappa$, то заключаем, что если f непрерывно в точке a, то $f_\varkappa$ непрерывно в точке $a_\varkappa$.

Следствие 2. *Пусть* X *и* Y — *топологические пространства. Для того чтобы отображение* f: $X \to Y$ *было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы отображение* g: $x \longmapsto (x, f(x))$ *было гомеоморфизмом пространства* X *на график* G *отображения* f (*рассматриваемый как подпространство произведения* $X \times Y$).

Поскольку $f = \mathrm{pr}_2 \circ g$, условие достаточно. Оно необходимо, ибо если f непрерывно, то g биективно и непрерывно (предложение 1), а его обращение является сужением на G проекции pr_1, которая непрерывна (см. Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 4, критерий CST 17).

Предложение 2 (ассоциативность топологического произведения). *Пусть* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство топологических пространств*, $(J_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ — *разбиение множества* I *и* $X'_\varkappa = \prod_{\iota\in J_\varkappa} X_\iota$ *для каждого* $\varkappa\in K$ — *произведение пространств* X_ι *с индексами* $\iota\in J_\varkappa$. *Каноническое отображение* (Теор. множ., Сводка результ., § 4, n° 11) *пространства* $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ *на пространство* $\prod_{\varkappa\in K} X'_\varkappa$ *есть гомеоморфизм.*

Это — частный случай транзитивности инициальных топологий (§ 2, предложение 5; см. Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 4, критерий CST 13).

Пространства $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ и $\prod_{\varkappa\in K} X'_\varkappa$ чаще всего *отождествляются* посредством канонического отображения.

Следствие. *Пусть* σ — *перестановка множества* I. *Отображение* $(x_\iota)\mapsto(x_{\sigma(\iota)})$ *есть гомеоморфизм* $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ *на* $\prod_{\iota\in I} X_{\sigma(\iota)}$.

Достаточно в предложении 2 взять $K=I$ и $J_\iota=\{\sigma(\iota)\}$ для каждого $\iota\in I$.

Предложение 3. *Пусть* X — *множество*, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство топологических пространств и* f_ι *для каждого* $\iota\in I$ — *отображение* X *в* Y_ι. *Пусть, далее,* f — *отображение* $x\mapsto(f_\iota(x))$ *множества* X *в* $Y=\prod_{\iota\in I} Y_\iota$ *и* $\mathscr{T}$ — *слабейшая из топологий в* X, *при которых непрерывны все* f_ι. *Тогда* $\mathscr{T}$ *есть прообраз относительно* f *топологии, индуцируемой в* $f(X)$ *топологией произведения* Y.

Это — другой частный случай транзитивности инициальных топологий (§ 2, предложение 5; см. Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 4, критерий CST 15).

Следствие. *Пусть* A_ι *для каждого* $\iota\in I$ — *подпространство пространства* Y_ι. *Топология, индуцируемая в* $A=\prod_{\iota\in I} A_\iota$ *топологией пространства* $\prod_{\iota\in I} Y_\iota$, *есть произведение топологий подпространств* A_ι.

Достаточно применить предложение 3 к функциям $f_\iota = j_\iota \circ \mathrm{pr}_\iota$, где j_ι — канонические инъекции $A_\iota \to Y_\iota$ (см. Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 4, критерий CST 14).

2. *Срез открытого множества; срез замкнутого множества; проекция открытого множества. Частичная непрерывность*

Предложение 4. *Пусть X_1 и X_2 — топологические пространства; для каждого $a_1 \in X_1$ отображение $x_2 \mapsto (a_1, x_2)$ есть гомеоморфизм пространства X_2 на подпространство $\{a_1\} \times X_2$ пространства $X_1 \times X_2$.*

Это — частный случай следствия 2 предложения 1, примененного к постоянной функции $x_2 \mapsto a_1$.

Отображение $x_2 \mapsto (a_1, x_2)$ есть *непрерывное сечение* (§ 3, n° 5) по отношению эквивалентности $\mathrm{pr}_2 z = \mathrm{pr}_2 z'$ в $X_1 \times X_2$; таким образом, факторпространство пространства $X_1 \times X_2$ по этому отношению эквивалентности гомеоморфно X_2.

Следствие. *Срез $A(x_1)$ открытого* (соотв. *замкнутого*) *подмножества A пространства $X_1 \times X_2$ по любой точке $x_1 \in X_1$ есть открытое* (соотв. *замкнутое*) *множество в X_2.*

Предложение 5. *Проекция открытого множества U из $X_1 \times X_2$ на любое из пространств-сомножителей есть открытое множество.*

В самом деле, например $\mathrm{pr}_2 U = \bigcup_{x_1 \in X_1} U(x_1)$, так что справедливость утверждения вытекает из следствия предложения 4 и аксиомы (O_I).

Замечание 1. Проекции *замкнутого* множества из $X_1 \times X_2$ на пространства-сомножители вполне могут *не быть замкнутыми множествами*. Например, на рациональной плоскости Q^2 гипербола, определяемая уравнением $x_1 x_2 = 1$, есть замкнутое множество, но обе ее проекции совпадают с дополнением к точке 0 в Q, а это множество не замкнуто.

Предложение 6. *Пусть X_1, X_2, Y — топологические пространства и f — отображение пространства $X_1 \times X_2$ в Y. Если f непрерывно в точке (a_1, a_2), то частичное отображение $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$ пространства X_2 в Y непрерывно в точке a_2.*

В самом деле, это отображение является композицией f и отображения $x_2 \mapsto (a_1, x_2)$, так что справедливость утверждения следует из предложения 4.

Предложение 6 часто выражают иначе, говоря, что непрерывная функция двух аргументов непрерывна по каждому аргументу в отдельности.

Замечание 2. Может случиться, что *все* частичные отображения, определяемые отображением f: $X_1 \times X_2 \to Y$, непрерывны, *а f не непрерывно на* $X_1 \times X_2$ (см. гл. IX, 2-е изд., § 5, упражнение 23 и Топ. векг. простр., гл. III, § 4, упражнение 4). ° Например, у отображения f числовой плоскости $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}$, определенного условиями $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ для $(x, y) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$, все частичные отображения непрерывны, однако f не непрерывно в точке (0, 0), поскольку $f(x, x) = \frac{1}{2}$ при $x \neq 0$.°

Если g — отображение пространства X_1 в Y, непрерывное в точке a_1, то отображение $(x_1, x_2) \mapsto g(x_1)$ пространства $X_1 \times X_2$ в Y непрерывно в любой точке (a_1, x_2), как композиция g и проекции на X_1.

Результаты этого n° непосредственно распространяются на любое произведение $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ топологических пространств, если заметить, что последнее гомеоморфно произведению $(\prod_{\iota \in J} X_\iota) \times (\prod_{\iota \in K} X_\iota)$ для каждого разбиения (J, K) множества I (предложение 2).

3. Замыкание в произведении

Предложение 7. *В произведении* $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ *топологических пространств* X_ι *замыкание произведения* $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ *множеств* A_ι *совпадает с произведением* $\prod_{\iota \in I} \overline{A}_\iota$ *их замыканий.*

В самом деле, пусть $a = (a_\iota)$ — точка прикосновения для $\prod_\iota A_\iota$; в силу непрерывности проекции $\mathrm{pr}_\varkappa$, $a_\varkappa = \mathrm{pr}_\varkappa a$ при любом $\varkappa \in I$ есть точка прикосновения для $A_\varkappa$ (§ 2, теорема 1), следовательно,

$a \in \prod_\iota \bar{A}_\iota$. Обратно, пусть $b=(b_\iota) \in \prod_\iota \bar{A}_\iota$ и $\prod_\iota V_\iota$ — какое-либо элементарное множество, содержащее b; тогда для любого $\iota \in I$ множество V_ι содержит некоторую точку $x_\iota \in A_\iota$ и, значит, $\prod_\iota V_\iota$ содержит точку $(x_\iota) \in \prod_\iota A_\iota$, чем доказано, что b есть точка прикосновения для $\prod_\iota A_\iota$.

Следствие. *Для того чтобы произведение* $\prod_\iota A_\iota$ *непустых множеств было замкнуто в пространстве* $\prod_\iota X_\iota$, *необходимо и достаточно, чтобы* A_ι *было замкнуто в* X_ι *при любом* ι.

Напомним, что если I *конечно*, то произведение $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ открыто, когда A_ι открыто в X_ι при любом ι; однако это не так, если I бесконечно.

Предложение 8. *Пусть* $a=(a_\iota)$ — *точка пространства* $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$; *множество* D *тех точек* $x \in X$, *у которых* $\mathrm{pr}_\iota x = a_\iota$ *для всех, кроме конечного числа, индексов* ι, *всюду плотно в* X.

В самом деле, для каждой точки $x \in X$ и каждого элементарного множества $V = \prod_{\iota \in I} U_\iota$, содержащего x, имеем $U_\iota = X_\iota$, за исключением индексов ι, принадлежащих некоторому конечному подмножеству J множества I; положим $y_\iota = x_\iota$ для $\iota \in J$ и $y_\iota = a_\iota$ для $\iota \notin J$; очевидно, $y=(y_\iota) \in D$ и $y \in V$, чем предложение доказано.

4. *Проективные пределы топологических пространств*

Пусть I — предупорядоченное множество (не обязательно фильтрующееся) с отношением предпорядка, обозначаемым $\alpha \leqslant \beta$. Пусть X_α для каждого $\alpha \in I$ — топологическое пространство и $f_{\alpha\beta}$ при $\alpha \leqslant \beta$ — отображение X_β в X_α. Будем говорить, что $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ есть *проективная система топологических пространств*, если: 1° $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — *проективная система множеств* (Приложение к гл. I, n° 1); 2° все $f_{\alpha\beta}$ *непрерывны*. Пусть X — множество $\varprojlim X_\alpha$

и f_α для каждого $\alpha \in I$ — каноническое отображение $X \to X_\alpha$; назовем *слабейшую из топологий в* X, *при которых непрерывны все* f_α, *проективным пределом* (относительно отображений $f_{\alpha\beta}$) топологий пространств X_α, а множество X, наделенное этой топологией, *проективным пределом проективной системы топологических пространств* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$. Говоря далее о $\varprojlim X_\alpha$ как о топологическом пространстве, мы всюду, где не оговорено противное, будем подразумевать, что топологией этого пространства служит проективный предел топологий пространств X_α.

Как известно, множество X есть подмножество произведения $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, образованное теми точками x, у которых

$$\mathrm{pr}_\alpha x = f_{\alpha\beta}(\mathrm{pr}_\beta x) \tag{1}$$

для любых α, β таких, что $\alpha \leqslant \beta$. Из предложения 3 вытекает, что проективный предел топологий пространств X_α совпадает с топологией в X, *индуцируемой* топологией пространства $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Если Y_α для каждого $\alpha \in I$ — подпространство пространства X_α, причем Y_α образуют *проективную систему подмножеств* множеств X_α (Приложение к гл. I, n° 1), то, очевидно, топологическое пространство $\varprojlim Y_\alpha$ является *подпространством* пространства $\varprojlim X_\alpha$.

Пусть $(X'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ — вторая проективная система топологических пространств с тем же множеством индексов I, и u_α: $X_\alpha \to X'_\alpha$, для всех $\alpha \in I$,— *непрерывные* отображения, образующие *проективную систему отображений* (u_α); тогда $u = \varprojlim u_\alpha$ есть непрерывное отображение пространства $X = \varprojlim X_\alpha$ в $X' = \varprojlim X'_\alpha$. В самом деле, обозначая через f_α каноническое отображение $X' \to X'_\alpha$, имеем $f'_\alpha \circ u = u_\alpha \circ f_\alpha$; следовательно, $f'_\alpha \circ u$ непрерывно для каждого $\alpha \in I$, и наше утверждение вытекает из предложения 4 § 2.

Предположим, наконец, что I *фильтруется вправо*, и пусть J — *кофинальная* часть I; пусть, далее, Z — проективный предел проективной системы топологических пространств $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \in J,\ \beta \in J}$. Тогда каноническая биекция g: $X \to Z$ (Теор. множ., гл. III, § 1, n° 12) есть *гомеоморфизм*. В самом деле, для каждого $\lambda \in J$ имеем $\mathrm{pr}_\lambda(g(x)) = \mathrm{pr}_\lambda x$, следовательно, g непрерывно (предложение 1); обратно, пусть h — биекция, обратная к g; для каждого $\alpha \in I$

существует такое $\lambda \in J$, что $\alpha \leqslant \lambda$, так что $\mathrm{pr}_\alpha(h(z)) = f_{\alpha\lambda}(\mathrm{pr}_\lambda z)$; это в силу предположения относительно отображений $f_{\alpha\beta}$ доказывает непрерывность h (предложение 1).

Предложение 9. *Пусть I — предупорядоченное множество, фильтрующееся вправо, $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических пространств с множеством индексов I, $X = \varprojlim X_\alpha$ и J — кофинальная часть I. Семейство множеств $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, где α пробегает J, f_α — каноническое отображение $X \to X_\alpha$, а U_α для каждого $\alpha \in J$ пробегает базис $\mathfrak{B}_\alpha$ топологии пространства X_α, является базисом топологии пространства X.*

Как мы знаем (§ 2, n° 3), *пересечения* всевозможных *конечных* семейств множеств вида $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ ($\alpha \in I$, U_α открыто в X_α) образуют базис топологии пространства X. Если $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство индексов из I, то существует такое $\gamma \in J$, что $\alpha_i \leqslant \gamma$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; тогда $f_{\alpha_i} = f_{\alpha_i\gamma} \circ f_\gamma$ и, положив $V_\gamma = \bigcap_i f_{\alpha_i\gamma}^{-1}(U_{\alpha_i})$, будем иметь $f_\gamma^{-1}(V_\gamma) = \bigcap_i f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$; но V_γ открыто, а потому является объединением множеств из $\mathfrak{B}_\gamma$; этим предложение доказано.

Следствие. *Предположим I фильтрующимся. Пусть A — подмножество из $X = \varprojlim X_\alpha$ и $A_\alpha = f_\alpha(A)$ для каждого $\alpha \in I$. Тогда:*

(I) *A_α (соотв. $\overline{A}_\alpha$) образуют проективную систему подмножеств пространств X_α и $\overline{A} = \bigcap_\alpha f_\alpha^{-1}(\overline{A}_\alpha) = \varprojlim \overline{A}_\alpha$.*

(II) *Если A замкнуто в X, то $A = \varprojlim A_\alpha = \varprojlim \overline{A}_\alpha$.*

Первое утверждение пункта (I) вытекает из соотношений $f_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ f_\beta$ для $\alpha \leqslant \beta$ и непрерывности отображений $f_{\alpha\beta}$ (§ 2, теорема 1). Положим $A' = \bigcap_\alpha f_\alpha^{-1}(\overline{A}_\alpha)$; очевидно, A' замкнуто и содержит A, откуда $\overline{A} \subset A'$. Обратно, пусть $x \in A'$; покажем, что x — точка прикосновения для A. В силу предложения 9 достаточно доказать, что всякая окрестность точки x, имеющая вид $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, где $\alpha \in I$ и U_α открыто в X_α, пересекается с A. Но, по предположе-

нию, $f_\alpha(x) \in U_\alpha$, и, поскольку $f_\alpha(x) \in \overline{A}_\alpha$, имеем $U_\alpha \cap A_\alpha \neq \varnothing$, а это означает, что $A \cap \overset{-1}{f_\alpha}(U_\alpha)$ не пусто.

Для установления справедливости пункта (II) достаточно заметить, что без всяких предположений относительно A имеем $A \subset \varprojlim A_\alpha \subset \varprojlim \overline{A}_\alpha$; если же A замкнуто, то из (I) следует, что $A = \varprojlim \overline{A}_\alpha$, и (II) доказано.

Пример. Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ — фильтрующееся (по $\supset$) семейство подмножеств множества Y и $\mathscr{T}_\alpha$ для каждого $\alpha \in I$ — топология в X_α, причем если $\alpha \leqslant \beta$, то топология $\mathscr{T}_\beta$ *мажорирует* топологию, индуцируемую в X_β топологией $\mathscr{T}_\alpha$. Тогда, если принять за $f_{\alpha\beta}$ при $\alpha \leqslant \beta$ каноническую инъекцию $X_\beta \to X_\alpha$, то $\varprojlim X_\alpha$ отождествится канонически с *пересечением* X пространств X_α, наделенным топологией, являющейся *верхней гранью* (§ 2, n° 3, пример II) топологий, индуцируемых в X топологиями $\mathscr{T}_\alpha$.

Упражнения

1) Пусть X и Y — топологические пространства, $A \subset X$, $B \subset Y$. Показать, что $\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B))$.

2) Пусть X и Y — топологические пространства, A — *замкнутое* множество в $X \times Y$ и $\mathfrak{V}(x)$ — множество всех окрестностей точки $x \in X$. Показать, что $\bigcap_{V \in \mathfrak{V}(x)} \overline{A(V)} = A(x)$. Дать пример такого открытого подмножества B пространства $X \times Y$, что $\bigcap_{V \in \mathfrak{V}(x)} B(V)$ отлично от $\overline{B(x)}$.

3) Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — бесконечное семейство топологических пространств, причем каждое X_ι содержит (по крайней мере) две различные точки a_ι, b_ι такие, что существует окрестность b_ι, не содержащая a_ι.

а) Пусть $c_\varkappa$ для каждого индекса $\varkappa \in I$ — точка пространства $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$, для которой $\mathrm{pr}_\varkappa c_\varkappa = b_\varkappa$ и $\mathrm{pr}_\iota c_\varkappa = a_\iota$ при $\iota \neq \varkappa$. Показать, что в множестве C всех таких точек $c_\varkappa$ пространства X все точки изолированные.

б) Вывести из а), что для того, чтобы топология пространства X обладала счетным базисом, необходимо и достаточно, чтобы I было счетно и топология каждого X_ι обладала счетным базисом. [Использовать упражнение 7 § 1.]

в) Показать, что если I несчетно, то у точки $b = (b_\iota)$ пространства X нет счетной фундаментальной системы окрестностей.

*4) Пусть K — дискретное пространство, образованное числами 0 и 1, A — бесконечное множество, X — пространство K^A. Пусть, далее, $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ — элементарное множество в X; положим $\mu(V) = 0$,

если V пусто, и $\mu(V)=2^{-h}$, если V не пусто и h — число тех индексов α, для которых $V_\alpha \neq K$.

а) Показать, что если U_1, ..., U_n — попарно не пересекающиеся элементарные множества, то $\sum_{k=1}^{n}\mu(U_k)\leqslant 1$. [Представить каждое U_k в виде $W_k\times K^B$, где B не зависит от k и является дополнением конечного подмножества из A, а W_k — конечное множество, число точек которого следует оценить.]

б) Вывести из а), что X удовлетворяет условию (D_{IV}) упражнения 7 § 1. [Заметить, что если бы существовало несчетное семейство (U_λ) попарно не пересекающихся элементарных множеств, то существовало бы целое число $p>0$ такое, что $\mu(U_\lambda)\geqslant\frac{1}{p}$ для бесконечного множества индексов λ.]

в) Показать, что если A несчетно, то X не удовлетворяет условию (D_{III}) упражнения 7 § 1. [См. упражнение 3.]

*5) Пусть K — дискретное пространство, образованное числами 0 и 1, A — бесконечное множество, X — пространство $K^{\mathfrak{P}(A)}$.

а) Пусть J — конечное подмножество множества A, состоящее из p элементов. Для каждого его подмножества H обозначим через $\mathfrak{M}_H$ множество таких подмножеств L множества A, для которых $L\cap J=H$; множества $\mathfrak{M}_H$ образуют разбиение $\overline{\omega}_J$ множества $\mathfrak{P}(A)$ на 2^p частей. Пусть F_J — множество в X, образованное элементами $(x_L)_{L\subset A}$, в которых $x_L=x_M$, когда L и M принадлежат одному и тому же множеству разбиения $\overline{\omega}_J$; F_J есть конечное множество, состоящее из 2^{2^p} элементов. Объединение F множеств F_J, где J пробегает все конечные подмножества множества A, равномощно A.

б) Показать, что F всюду плотно в X. Вывести отсюда, что если $A=\mathbf{N}$, то X удовлетворяет условию (D_{II}) упражнения 7 § 1, но не удовлетворяет условию (D_{III}). [Упражнение 4.]

6) Пусть X, Y, Z — топологические пространства, A — открытое множество в $X\times Y$, B — открытое множество в $Y\times Z$. Показать, что множество $B\circ A$ открыто в $X\times Z$.

7) Пусть X — сумма семейства (X_λ) топологических пространств, Y — сумма семейства (Y_μ) топологических пространств. Показать, что пространство $X\times Y$ является суммой семейства пространств $X_\lambda\times Y_\mu$.

8) Пусть $(G_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство графиков отношений эквивалентности (Теор. множ., гл. II, § 6, n° 1) в топологическом пространстве X и R_ι — отношение эквивалентности $(x, y)\in G_\iota$; тогда $G=\bigcap_{\iota\in I} G_\iota$ есть график некоторого отношения эквивалентности R в X. Показать, что существует каноническое инъективное непрерывное отображение факторпространства X/R в произведение $\prod_{\iota\in I}(X/R_\iota)$ факторпространств X/R_ι.

9) Пусть $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — бесконечное семейство топологических пространств. Изучить в произведении $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$ множеств X_ι топологию, порождаемую всевозможными множествами вида $\prod_{\iota\in I} U_\iota$, где U_ι — открытое множество в X_ι и множество тех $\iota\in I$, для которых $U_\iota\neq X_\iota$, имеет мощность $<\mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — заданное кардинальное число. Исследовать, какой вид принимают в этой топологии предложения, доказанные в § 4.

10) а) Пусть $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических пространств, X — ее проективный предел, f_α — каноническое отображение $X\to X_\alpha$, а Y_α для каждого α — подпространство пространства X_α, содержащее $f_\alpha(X)$, причем (Y_α) — проективная система подпространств пространств X_α. Показать, что $\varprojlim Y_\alpha$ канонически отождествим с X.

б) Пусть $(X'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ — вторая проективная система топологических пространств с тем же множеством индексов, которое предполагается фильтрующимся, и $u_\alpha\colon X_\alpha\to X'_\alpha$ для всех α — непрерывные отображения, образующие проективную систему Тогда $u_\alpha(X_\alpha)$ образуют проективную систему подпространств пространств X'_α; показать, что если $u=\varprojlim u_\alpha$ и f_α сюръективны, то $u(X)$ плотно в пространстве $\varprojlim u_\alpha(X_\alpha)$. Остается ли еще это предложение в силе, если отображения f_α не предполагать сюръективными [см. Теор. множ., гл. III, § 1, упражнение 32]?

§ 5. Открытые и замкнутые отображения

1. Открытые и замкнутые отображения

Определение 1. *Пусть X и X' — топологические пространства. Говорят, что отображение $f\colon X\to X'$ открыто* (соотв. *замкнуто*), *если образ при отображении f всякого открытого* (соотв. *замкнутого*) *множества из X открыт* (соотв. *замкнут*) *в X'.*

В частности, $f(X)$ является тогда открытым (соотв. замкнутым) множеством в X'.

Примеры. 1) Пусть A — подпространство топологического пространства X; для того чтобы каноническая инъекция $j\colon A\to X$ была открытой (соотв. замкнутой), необходимо и достаточно, чтобы A было открыто (соотв. замкнуто) в X (§ 3, n° 1).

2) Для того чтобы биекция f топологического пространства X на топологическое пространство X' была *гомеоморфизмом*, необходимо и достаточно, чтобы она была *непрерывной и открытой* или *непрерывной и замкнутой*.

3) Пусть f — *сюръекция* множества X на топологическое пространство X'; если наделить X топологией, являющейся *прообразом* топологии пространства X' относительно f (§ 2, n° 3, пример I), то f будет непрерывным отображением X в X', одновременно открытым и замкнутым.

4) В произведении $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$ топологических пространств X_ι всякая проекция $\mathrm{pr}_\iota\colon X\to X_\iota$ есть непрерывное, открытое, но не обязательно замкнутое отображение (§ 4, предложение 5).

°5) Голоморфная функция f на открытом множестве $A\subset\mathbf{C}$ есть открытое отображение A в $\mathbf{C}$.°

6) Пусть X и X' — топологические пространства, f — непрерывная, но не взаимно непрерывная биекция X на X'; тогда обратная биекция $g\colon X'\to X$ есть открытое и замкнутое отображение X' на X, не являющееся непрерывным.

Предложение 1. *Пусть X, X' и X'' — топологические пространства, $f\colon X\to X'$ и $g\colon X'\to X''$ — отображения. Тогда:*

а) *Если f и g открыты* (соотв. *замкнуты*), *то $g\circ f$ открыто* (соотв. *замкнуто*).

б) *Если $g\bullet f$ открыто* (соотв. *замкнуто*), *а f сюръективно и непрерывно, то g открыто* (соотв. *замкнуто*).

в) *Если $g\circ f$ открыто* (соотв. *замкнуто*), *а g инъективно и непрерывно, то f открыто* (соотв. *замкнуто*).

Утверждение а) непосредственно следует из определения 1. Для доказательства б) достаточно заметить, что всякое открытое (соотв. замкнутое) множество A' в X' записывается в виде $A'=f(A)$, где $A=\overset{-1}{f}(A')$ открыто (соотв. замкнуто) в X (§ 2, теорема 1); таким образом, $g(A')=g(f(A))$ открыто (соотв. замкнуто) в X''. Наконец, чтобы доказать в), заметим, что для любого множества $A\subset X$ имеем $f(A)=\overset{-1}{g}(g(f(A)))$; по предположению, если A открыто (соотв. замкнуто) в X, то $g(f(A))$ открыто (соотв. замкнуто) в X'', и, следовательно, в силу теоремы 1 § 2, $f(A)$ открыто (соотв. замкнуто) в X'.

Предложение 2. *Пусть X и Y — топологические пространства, f — отображение X в Y. Для любого множества $T \subset Y$ обозначим через f_T отображение $f^{-1}(T)$ в T, совпадающее с f на $f^{-1}(T)$.*

а) *Если f открыто* (соотв. *замкнуто*), *то f_T открыто* (соотв. *замкнуто*).

б) *Пусть $(T(\iota))_{\iota \in I}$ — семейство подмножеств пространства Y, внутренности которых образуют покрытие Y, или которое является локально конечным замкнутым покрытием Y; если все $f_{T(\iota)}$ открыты* (соотв. *замкнуты*), *то f открыто* (соотв. *замкнуто*).

а) Если A — открытое (соотв. замкнутое) множество в $f^{-1}(T)$, то существует такое открытое (соотв. замкнутое) множество B в X, что $A = B \cap f^{-1}(T)$; тогда $f_T(A) = f(B) \cap T$; но, по предположению, $f(B)$ открыто (соотв. замкнуто) в Y, следовательно, $f_T(A)$ открыто (соотв. замкнуто) в T.

б) Пусть B — открытое (соотв. замкнутое) множество в X и $B_\iota = B \cap f^{-1}(T(\iota))$; имеем $f(B) \cap T(\iota) = f_{T(\iota)}(B_\iota)$; так как, по предположению, $f_{T(\iota)}(B_\iota)$ открыто (соотв. замкнуто) в $T(\iota)$, то $f(B)$ открыто (соотв. замкнуто) в Y в силу предложения 3 § 3.

Следствие. *Пусть $(T(\iota))_{\iota \in I}$ — семейство подмножеств пространства Y, внутренности которых образуют покрытие Y, или которое является локально конечным замкнутым покрытием Y. Если $f\colon X \to Y$ непрерывно, а каждое $f_{T(\iota)}$ есть гомеоморфизм $f^{-1}(T(\iota))$ на $T(\iota)$, то f — гомеоморфизм X на Y.*

В самом деле, ясно, что f биективно, а в силу предложения 2 оно открыто.

2. Открытые и замкнутые отношения эквивалентности

Определение 2. *Отношение эквивалентности R в топологическом пространстве X называют открытым* (соотв. *замкнутым*), *если каноническое отображение X на X/R открыто* (соотв. *замкнуто*).

Это означает, другими словами, что *насыщение* по R всякого открытого (соотв. замкнутого) множества из X есть открытое (соотв. замкнутое) множество в X (§ 3, п° 4).

Примеры. 1) Пусть X — топологическое пространство, Γ — *группа гомеоморфизмов* X на себя, R — отношение эквивалентности между x и y:

«существует $\sigma \in \Gamma$ такое, что $y=\sigma(x)$»

(иначе говоря, отношение эквивалентности, классами которого служат *орбиты* группы Γ в X; см. Алгебра, гл. I, § 7, n° 5). Покажем, что отношение R *открыто*; в самом деле, насыщение множества $A \subset X$ по R есть объединение образов $\sigma(A)$, где σ пробегает Γ; но если A открыто, то открыто каждое $\sigma(A)$, а значит, и их объединение.

°На числовой прямой $\mathbf{R}$ отношение эквивалентности $x \equiv y \pmod 1$ открыто, ибо оно определено описанным только что способом с помощью группы переносов $x \longmapsto x+n$ $(n \in \mathbf{Z})$ (см. гл. III, 3-е изд., § 2, n° 4).°

2) Пусть пространство X есть сумма семейства (X_ι) своих подпространств и X/R — пространство, получаемое *склеиванием* пространств X_ι по *открытым* множествам $A_{\iota\varkappa}$ посредством биекций $h_{\varkappa\iota}$ (§ 2, n° 5); будем предполагать, что $h_{\varkappa\iota}$ для любой пары индексов ι, $\varkappa$ есть *гомеоморфизм* $A_{\iota\varkappa}$ на $A_{\varkappa\iota}$. При этих условиях отношение R *открыто*. В самом деле, если U — открытое множество в X, то насыщением U является объединение множеств $h_{\varkappa\iota}(U \cap A_{\iota\varkappa})$; поскольку $U \cap A_{\iota\varkappa}$ открыто в $A_{\iota\varkappa}$, множество $h_{\varkappa\iota}(U \cap A_{\iota\varkappa})$ открыто в $A_{\varkappa\iota}$, а значит, также в X, откуда и следует наше утверждение.

3) В обозначениях примера 2 предположим теперь, что все $A_{\iota\varkappa}$ *замкнуты*, а все $h_{\varkappa\iota}$ — *гомеоморфизмы*; кроме того, предположим, что для каждого индекса ι существует только *конечное* число индексов $\varkappa$ таких, что $A_{\iota\varkappa} \neq \varnothing$ (говоря образно, каждое X_ι «склеивается» только с конечным числом $X_\varkappa$). При этих условиях отношение R *замкнуто*. В самом деле, для каждого замкнутого множества F в X насыщением F является объединение множеств $h_{\varkappa\iota}(F \cap A_{\iota\varkappa}) \subset A_{\varkappa\iota}$; но из сделанных предположений вытекает, что это семейство *локально конечно*, а с другой стороны, $h_{\varkappa\iota}(F \cap A_{\iota\varkappa})$ замкнуто в $A_{\varkappa\iota}$ и, значит, также в X. Справедливость нашего утверждения вытекает теперь из предложения 4 § 1.

Предложение 3. *Пусть X и Y — топологические пространства, f: $X \to Y$ — непрерывное отображение, R — отношение эквивалентности $f(x)=f(y)$ в X и $X \xrightarrow{p} X/R \xrightarrow{h} f(X) \xrightarrow{i} Y$ — каноническое разложение f. Следующие три свойства равносильны*:

а) *f — открытое отображение.*

б) *Отображения p, h и i открыты.*

в) *Отношение эквивалентности R открыто, h — гомеоморфизм и $f(X)$ — открытое множество в Y.*

Кроме того, все предшествующее остается в силе, если всюду заменить «открытое» на «замкнутое».

Поскольку инъекция i непрерывна, из предложения 1в следует, что если f открыто, то открыто и $h \circ p$; поскольку p сюръективно и непрерывно, предложение 1б показывает тогда, что h открыто и, значит, будучи непрерывной биекцией, есть гомеоморфизм; отсюда заключаем (предложение 1а), что $p = \overset{-1}{h} \circ (h \circ p)$ открыто. С другой стороны (предложение 1б), $i \circ h$ открыто, а потому (предложение 1а) также $i = (i \circ h) \circ \overset{-1}{h}$ открыто. Этим доказано, что а) влечет б). Обратно, б) влечет а) в силу предложения 1а. Наконец, равносильность б) и в) непосредственно следует из определений.

Доказательство почти слово в слово такое же и в случае замкнутых отображений.

Предложение 4. *Пусть R — открытое* (соотв. *замкнутое*) *отношение эквивалентности в топологическом пространстве X, f — каноническое отображение $X \to X/R$, A — множество в X. Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий*:

а) *A открыто* (соотв. *замкнуто*) *в X.*

б) *A насыщено по R.*

Тогда отношение R_A, индуцируемое отношением R в A, открыто (соотв. *замкнуто*) *и каноническое отображение пространства A/R_A на $f(A)$ есть гомеоморфизм.*

Рассмотрим коммутативную диаграмму (1) n° 6 § 3, дающую каноническое разложение отображения $f \circ j$. При условии а) j открыто (соотв. замкнуто), а по предположению то же справедливо и для f; следовательно, $f \circ j$ открыто (соотв. замкнуто) (предложение 1а) и справедливость утверждения следует из предложения 3. При условии б) имеем $A = \overset{-1}{f}(f(A))$ и $h \circ \varphi$ есть отображение A в $f(A)$, совпадающее с f на A; в силу предложения 2а отображение $h \circ \varphi$ открыто (соотв. замкнуто) и справедливость утверждения снова следует из предложения 3, если применить его к $h \circ \varphi$.

3. Специальные свойства открытых отображений

Предложение 5. *Пусть X и Y — топологические пространства, f — отображение X в Y и $\mathfrak{B}$ — базис топологии пространства X. Следующие свойства равносильны:*

а) *f — открытое отображение.*

б) *$f(U)$ открыто в Y для каждого $U \in \mathfrak{B}$.*

в) *$f(V)$ есть окрестность точки $f(x)$ в Y для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности V в X.*

Равносильность а) и б) сразу следует из определений и (O_1); равносильность а) и в) вытекает из предложения 1 § 1.

Предложение 6. *Пусть R — отношение эквивалентности в топологическом пространстве X. Следующие три условия равносильны:*

а) *Отношение R открыто.*

б) *Внутренность всякого множества, насыщенного по R, насыщена по R.*

в) *Замыкание всякого множества, насыщенного по R, насыщено по R.*

В равносильности б) и в) убеждаемся переходом к дополнениям (§ 1, п° 6, формулы (2)). Покажем, что б) влечет а); предположим, что б) выполнено, и пусть U — открытое множество в X, а V — его насыщение по R; имеем $\mathring{V} \supset U$, и так как по предположению $\mathring{V}$ насыщено, то $\mathring{V}=V$, т. е. насыщение множества U открыто. Покажем, что, обратно, а) влечет б); предположим, что а) выполнено, и пусть A — множество, насыщенное по R; если B — насыщение множества $\mathring{A}$, то $\mathring{A} \subset B \subset A$, и так как B по предположению открыто, то $B=\mathring{A}$.

Предложение 7. *Пусть R — открытое отношение эквивалентности в топологическом пространстве X и φ — каноническое отображение $X \to X/R$.*

(I) *Для любого множества $A \subset X$, насыщенного по R, замыканием* (соотв. *внутренностью*) *множества $\varphi(A)$ в X/R служит $\varphi(\overline{A})$* (соотв. $\varphi(\mathring{A})$).

(II) *Для каждого множества C из X/R имеем $\overline{\varphi^{-1}(C)}=\overline{\varphi^{-1}(C)}$,*

(II) вытекает из (I), ибо множество $A=\overset{-1}{\varphi}(C)$ насыщено по R; значит, также $\overline{A}$ насыщено по R (предложение 6) и $\varphi(\overline{A})=\overline{C}$, откуда $\overline{A}=\overset{-1}{\varphi}(\overline{C})$. Переходя к доказательству двух утверждений, содержащихся в (I), заметим, что они получаются друг из друга переходом к дополнениям, если воспользоваться формулами (2) n° 6 § 1 и тем, что для насыщенного множества $B\subset X$ справедливо равенство $\varphi(\mathbf{C}B)=\mathbf{C}\varphi(B)$. В силу предложения 6, множество $\overline{A}$ насыщено, значит, $\varphi(\overline{A})$ замкнуто в X/R, а так как $A\subset\overline{A}$, то $\varphi(A)\subset\varphi(\overline{A})$, откуда $\overline{\varphi(A)}\subset\varphi(\overline{A})$; но, поскольку φ непрерывно, имеем $\varphi(\overline{A})\subset\overline{\varphi(A)}$ (§ 2, теорема 1); следовательно, $\overline{\varphi(A)}=\varphi(\overline{A})$ и предложение доказано.

Предложение 8. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *и* $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ *— семейства топологических пространств с одним и тем же множеством индексов,* f_ι *для каждого* $\iota\in I$ *— открытое отображение* X_ι *в* Y_ι*, причем* f_ι *сюръективно для всех кроме конечного числа индексов* ι*. Тогда отображение* $f\colon (x_\iota)\mapsto(f_\iota(x_\iota))$ *пространства* $\prod_{\iota\in I}X_\iota$ *в* $\prod_{\iota\in I}Y_\iota$ *открыто.*

В самом деле, достаточно (предложение 5) доказать, что образ при f всякого элементарного множества $\prod_{\iota\in I}A_\iota$ из $\prod_{\iota\in I}X_\iota$ открыт в $\prod_{\iota\in I}Y_\iota$. Но этим образом служит $\prod_{\iota\in I}f_\iota(A_\iota)$, а из наших предположений вытекает, что $f_\iota(A_\iota)$ открыто в Y_ι для каждого $\iota\in I$, причем $f_\iota(A_\iota)=Y_\iota$ для всех кроме конечного числа индексов ι. Тем самым предложение доказано.

Следствие. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *— семейство топологических пространств,* R_ι *для каждого* $\iota\in I$ *— отношение эквивалентности в* X_ι*, а* f_ι *— каноническое отображение* $X_\iota\to X_\iota/R_\iota$*. Пусть, далее,* R *— отношение эквивалентности между* x *и* y *в* $X=\prod_{\iota\in I}X_\iota$*:*

$$\text{«}\mathrm{pr}_\iota x\equiv\mathrm{pr}_\iota y\pmod{R_\iota}\text{ для каждого }\iota\in I\text{»}$$

и f *— отображение* $(x_\iota)\mapsto(f_\iota(x_\iota))$ *пространства* X *в* $\prod_{\iota\in I}(X_\iota/R_\iota)$.

Если каждое из отношений R_ι открыто, то R открыто и биекция, ассоциированная с f, является гомеоморфизмом X/R на $\prod_{\iota\in I}(X_\iota/R_\iota)$.

В самом деле, R есть отношение $f(x)=f(y)$, а так как f непрерывно и открыто в силу доказанного только что предложения 8 и следствия 1 предложения 1 § 4, то справедливость утверждения следует из предложения 3.

В частности, если R (соотв. S) — *открытое* отношение эквивалентности в топологическом пространстве X (соотв. Y), то каноническая биекция $(X\times Y)/(R\times S)$ на $(X/R)\times(Y/S)$ (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 10) есть гомеоморфизм; если же не предполагать R и S открытыми, то эта биекция, оставаясь непрерывной, уже не обязательно будет гомеоморфизмом, даже когда одно из отношений R, S есть отношение равенства (упражнение 6).

4. Специальные свойства замкнутых отображений

Предложение 9. *Пусть X и X' — топологические пространства. Для того чтобы отображение f: $X\to X'$ было непрерывным и замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$ для любого множества $A\subset X$.*

Условие достаточно, ибо замкнутость f оно влечет очевидным образом, а непрерывность f влечет в силу теоремы 1 § 2. Обратно, если f непрерывно и замкнуто, то $f(A)\subset f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ в силу теоремы 1 § 2; а так как, кроме того, $f(\overline{A})$ замкнуто в X' по предположению, то, следовательно, $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$.

Предложение 10. *Пусть R — отношение эквивалентности в топологическом пространстве X. Для того чтобы R было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы всякий класс эквивалентности M по R обладал фундаментальной системой окрестностей, насыщенных по R.*

В самом деле, предположим, что R замкнуто, и пусть U — произвольная открытая окрестность класса M; поскольку $F=\complement U$ замкнуто в X, насыщение S множества F по R замкнуто в X.

Так как при этом M насыщено по R, то $M \cap S = \varnothing$, и, следовательно, $V = \complement S$ есть открытая окрестность M, насыщенная по R и содержащаяся в U.

Обратно, предположим, что R удовлетворяет условию предложения, и пусть F — произвольное замкнутое множество в X. Пусть T — насыщение F по R, x — точка из $\complement T$ и M — ее класс эквивалентности; имеем $M \cap T = \varnothing$ и, тем более, $M \cap F = \varnothing$, т. е. $U = \complement F$ — окрестность M. Следовательно, существует окрестность $V \subset U$ класса M, насыщенная по R, и так как $V \cap F = \varnothing$, имеем также $V \cap T = \varnothing$; отсюда вытекает, что $\complement T$ есть окрестность класса M, а тем самым и точки x; этим доказано (§ 1, предложение 1), что $\complement T$ открыто, т. е. T замкнуто.

Замечание. Предложение 10 влечет следующее свойство: если R замкнуто, то для любой точки $x \in X$ и любой *окрестности* U *ее класса эквивалентности в* X множество $\varphi(U)$, где φ — каноническое отображение $X \to X/R$, есть окрестность точки $\varphi(x)$ в X/R. Следует заметить, что это ни в какой мере не означает, что $\varphi(V)$ является окрестностью точки $\varphi(x)$ в X/R для любой окрестности V точки x в X; другими словами (предложение 5), замкнутое отношение эквивалентности не обязательно открыто (упражнение 2). Обратно, открытое отношение эквивалентности может не быть замкнутым (n° 1, пример 4); в самом деле, если U — окрестность класса эквивалентности M в X, то для любой точки $x \in M$ и любой ее окрестности $V \subset U$ насыщение V хотя и является окрестностью M в X, но эта окрестность *не обязательно содержится в* U.

Отметим, наконец, что существуют одновременно открытые и замкнутые отношения эквивалентности, отличные от равенства (упражнение 3), равно как и отношения эквивалентности, не являющиеся ни открытыми, ни замкнутыми (§ 8, упражнение 10).

Упражнения

1) а) Для того чтобы отношение эквивалентности R в топологическом пространстве X было открытым, необходимо и достаточно, чтобы насыщение внутренности каждого множества $A \subset X$ содержалось во внутренности насыщения A; дать пример, когда R открыто и эти два множества могут быть различны.

б) Для того чтобы отношение эквивалентности R в топологическом пространстве X было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы насыщение замыкания каждого множества $A \subset X$ содержало замыкание насыщения A; дать пример, когда R замкнуто и эти два множества могут быть различны.

°2) Показать, что в $\mathbf{R}$ отношение эквивалентности S: $x \equiv y \pmod 1$ не замкнуто. Индуцированное в $A=[0, 1]$ отношение S_A замкнуто, но не открыто.

3) Пусть Γ — *конечная* группа гомеоморфизмов топологического пространства X и R — отношение эквивалентности: «существует такое $\sigma \subset \Gamma$, что $y=\sigma(x)$». Показать, что R одновременно открыто и замкнуто.

°4) Рассмотрим в факторпространстве $\mathbf{T}$ пространства $\mathbf{R}$ по отношению эквивалентности $x \equiv y \pmod 1$ группу гомеоморфизмов Γ, состоящую из тождественного отображения и гомеоморфизма, полученного из гомеоморфизма $x \mapsto \frac{1}{2} + x$ пространства $\mathbf{R}$ на себя факторизацией. Пусть S — отношение эквивалентности в $\mathbf{T}$: «существует такое $\sigma \in \Gamma$, что $y=\sigma(x)$», которое одновременно открыто и замкнуто (упражнение 3). Показать, что не существует непрерывных сечений $\mathbf{T}$ по S, хотя $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}/S$ компактны, связны и локально связны. Пусть A — канонический образ в $\mathbf{T}$ интервала $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ из $\mathbf{R}$; показать, что A локально замкнуто в $\mathbf{T}$, но факторпространство A/S_A не гомеоморфно каноническому образу A в $\mathbf{T}/S$.

5) Пусть X — топологическое пространство, R и S — отношения эквивалентности в X, причем R влечет S.

а) Показать, что если S открыто (соотв. замкнуто), то S/R открыто (соотв. замкнуто) в X/R, но что обратное не обязательно верно. Показать, что S может быть открытым (соотв. замкнутым) и без того, чтобы также R было таковым.

б) Предположим, что R открыто (соотв. замкнуто). Показать, что для того, чтобы S/R было открытым (соотв. замкнутым), необходимо и достаточно, чтобы S было открытым (соотв. замкнутым).

6) Рассмотрим на рациональной прямой $\mathbf{Q}$ отношение эквивалентности S, получаемое отождествлением между собой всех точек из $\mathbf{Z}$. Показать, что отношение S замкнуто; каноническая биекция пространства $(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})/(U\times S)$ на $\mathbf{Q}\times(\mathbf{Q}/S)$, где U означает отношение равенства в $\mathbf{Q}$, не является гомеоморфизмом.

7) Пусть X и Y — непустые топологические пространства, f: $X \to Y$ — сюръективное отображение. Для того чтобы f было замкнутым (соотв. открытым), необходимо и достаточно, чтобы отображение $y \mapsto f^{-1}(y)$ пространства Y в $\mathfrak{P}_0(X)$ было непрерывным при наделении $\mathfrak{P}_0(X)$ топологией $\mathscr{T}_\Omega$ (соотв. $\mathscr{T}_\Phi$) (§ 2, упражнение 7).

Вывести отсюда, что для того чтобы топология, индуцируемая в фактормножестве X/R непустого топологического пространства X топологией $\mathscr{T}_\Omega$ (соотв. $\mathscr{T}_\Phi$), совпадала с фактортопологией топологии пространства X по R, необходимо и достаточно, чтобы отношение R было замкнутым (соотв. открытым) (см. § 3, упражнение 16).

§ 6. Фильтры

1. Определение фильтра

Определение 1. *Фильтром в множестве X называют множество $\mathfrak{F}$ его подмножеств, обладающее следующими свойствами:*

(F_I) *Всякое подмножество множества X, содержащее множество из $\mathfrak{F}$, принадлежит $\mathfrak{F}$.*

(F_{II}) *Всякое пересечение конечного семейства множеств из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.*

(F_{III}) *Пустое подмножество множества X не принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Из последних двух свойств вытекает, что пересечение любого конечного семейства множеств из $\mathfrak{F}$ *не пусто.*

Фильтр $\mathfrak{F}$ в X определяет в X структуру, имеющую (F_I), (F_{II}) и (F_{III}) своими аксиомами; эта структура называется *структурой фильтрующегося множества*, а множество X, наделенное этой структурой,— *множеством, фильтрующимся по фильтру* $\mathfrak{F}$.

Аксиома (F_{II}) равносильна соединению следующих двух аксиом:

(F_{IIa}) *Пересечение любых двух множеств из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.*

($F_{IIб}$) *X принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Аксиомы ($F_{IIб}$) и (F_{III}) показывают, что *в пустом множестве нет фильтров.*

Для того чтобы множество подмножеств, удовлетворяющее аксиоме (F_I), удовлетворяло также аксиоме ($F_{IIб}$), необходимо и достаточно, чтобы оно было *не пусто.* Для того чтобы множество подмножеств, удовлетворяющее аксиоме (F_I), удовлетворяло также аксиоме (F_{III}), необходимо и достаточно, чтобы оно было отлично от $\mathfrak{P}(X)$.

Примеры фильтров. 1) Если $X \neq \varnothing$, то множество подмножеств, сводящееся к одному элементу X, является фильтром в X. И вообще, множество всех подмножеств множества X, содержащих непустое множество $A \subset X$, есть фильтр в X.

2) *Множество всех окрестностей* непустого множества (в частности, точки) в топологическом пространстве X есть фильтр.

3) Если X — *бесконечное* множество, то *дополнения ко всевозможным его конечным подмножествам* образуют фильтр. Фильтр дополнений к конечным подмножествам множества $\mathbf{N}$ целых чисел $\geqslant 0$ называется *фильтром Фреше.*

2. Сравнение фильтров

Определение 2. *Пусть даны фильтры* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{F}'$ *в одном и том же множестве* X. *Мы говорим, что* $\mathfrak{F}'$ *мажорирует* $\mathfrak{F}$ *или что* $\mathfrak{F}$ *минорирует* $\mathfrak{F}'$, *если* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$. *Если, кроме того,* $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}'$, *то мы говорим, что* $\mathfrak{F}'$ *сильнее* $\mathfrak{F}$ *или что* $\mathfrak{F}$ *слабее* $\mathfrak{F}'$.

Два фильтра, один из которых мажорирует другой, называются *сравнимыми*. Множество всех фильтров в X *упорядочено* отношением «фильтр $\mathfrak{F}$ мажорируется фильтром $\mathfrak{F}'$», которое является не чем иным, как отношением, индуцированным отношением включения из $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$.

Пусть $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное *непустое* семейство фильтров в множестве X (необходимо непустом); множество $\mathfrak{F} = \bigcap_{\iota \in I} \mathfrak{F}_\iota$ удовлетворяет аксиомам $(\mathrm{F_I})$, $(\mathrm{F_{II}})$ и $(\mathrm{F_{III}})$ и есть, таким образом, фильтр; этот фильтр, называемый *пересечением* семейства фильтров $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota \in I}$, есть, очевидно, *нижняя грань* множества фильтров $\mathfrak{F}_\iota$ в упорядоченном множестве всех фильтров в X.

> Фильтр, образованный единственным множеством X, есть *наименьший элемент* упорядоченного множества всех фильтров в X; если X состоит более чем из одного элемента, то, как мы увидим в n° 4, в упорядоченном множестве всех фильтров в X нет наибольшего элемента.

Пусть дано некоторое множество $\mathfrak{G}$ подмножеств множества X; исследуем, существуют ли в X фильтры, *содержащие* $\mathfrak{G}$. Если такой фильтр существует, то, согласно $(\mathrm{F_{II}})$, он содержит также множество $\mathfrak{G}'$ *пересечений всевозможных конечных семейств* множеств из $\mathfrak{G}$ (и в том числе X как пересечение пустого множества множеств из $\mathfrak{G}$); поэтому для того, чтобы поставленная задача имела положительное решение, *необходимо*, чтобы пустое подмножество множества X не принадлежало $\mathfrak{G}'$. Покажем, что это условие и *достаточно*; в самом деле, всякий фильтр, содержащий $\mathfrak{G}'$, содержит также, согласно $(\mathrm{F_I})$, множество $\mathfrak{G}''$ всех подмножеств множества X, содержащих каждое какое-либо множество из $\mathfrak{G}'$. Но $\mathfrak{G}''$, очевидно, удовлетворяет аксиоме $(\mathrm{F_I})$; оно удовлетворяет и аксиоме $(\mathrm{F_{II}})$ в силу определения множества $\mathfrak{G}'$; наконец, оно удовлетворяет также аксиоме $(\mathrm{F_{III}})$, ибо пустое

подмножество множества X не принадлежит $\mathfrak{G}'$. Следовательно, $\mathfrak{G}''$ есть *слабейший из фильтров, содержащих* $\mathfrak{G}$. Таким образом, мы доказали

Предложение 1. *Для того чтобы в X существовал фильтр, содержащий множество $\mathfrak{G}$ подмножеств множества X, необходимо и достаточно, чтобы никакое пересечение конечного семейства множеств из $\mathfrak{G}$ не было пусто.*

Мы будем говорить, что определенный выше фильтр $\mathfrak{G}''$ *порожден* множеством $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{G}$ есть *система образующих* фильтра $\mathfrak{G}''$.

Пример. Пусть $\mathfrak{S}$ — какое-либо множество подмножеств множества X; рассмотрим топологию $\mathscr{T}$ в X, *порожденную* множеством $\mathfrak{S}$ (§ 2, n° 3, пример II). Так как множество пересечений всевозможных конечных семейств множеств из $\mathfrak{S}$ служит базисом топологии $\mathscr{T}$, то из проведенного выше доказательства предложения 1 и предложения 3 § 1 вытекает, что *фильтр окрестностей* любой точки $x \in X$ в топологии $\mathscr{T}$ *порождается* множеством $\mathfrak{S}(x)$ всех множеств из $\mathfrak{S}$, содержащих x.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в множестве X и $A \subset X$. Для того чтобы существовал фильтр $\mathfrak{F}'$, мажорирующий $\mathfrak{F}$ и содержащий A, необходимо и достаточно, чтобы A имело непустое пересечение с каждым множеством из $\mathfrak{F}$.*

Следствие 2. *Для того чтобы множество Φ фильтров в непустом множестве X обладало верхней гранью в множестве всех фильтров в X, необходимо и достаточно, чтобы для любой конечной последовательности $(\mathfrak{F}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ элементов из Φ и любых $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ пересечение $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ было непусто.*

В самом деле, этим выражается то, что объединение $\mathfrak{G}$ всех фильтров $\mathfrak{F} \in \Phi$ удовлетворяет условию предложения 1.

Следствие 3. *Упорядоченное множество всех фильтров в непустом множестве X индуктивно.*

В самом деле, всякое *совершенно упорядоченное множество* Φ фильтров в X удовлетворяет условию следствия 2 предложения 1, ибо в силу предположения множества A_i принадлежат все некоторому $\mathfrak{F}_j$, так что остается применить аксиому $(\mathrm{F}_{\mathrm{II}})$.

3. Базисы фильтра

Пусть $\mathfrak{G}$ — система образующих фильтра $\mathfrak{F}$ в X (n° 2). Вообще говоря, $\mathfrak{F}$ не является множеством всех подмножеств множества X, содержащих каждое какое-либо множество из $\mathfrak{G}$: для того чтобы система $\mathfrak{G}$ обладала этим свойством, необходимо и достаточно, чтобы пересечение любого конечного семейства множеств из $\mathfrak{G}$ содержало некоторое множество из $\mathfrak{G}$. Таким образом, имеем следующее предложение:

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое множество подмножеств множества X; для того чтобы множество всех подмножеств множества X, содержащих каждое какое-либо множество из $\mathfrak{B}$, было фильтром, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{B}$ обладало следующими двумя свойствами:*

(B_I) *Пересечение любых двух множеств из $\mathfrak{B}$ содержит некоторое множество из $\mathfrak{B}$.*

(B_{II}) *$\mathfrak{B}$ непусто и пустое подмножество множества X не принадлежит $\mathfrak{B}$.*

Определение 3. *Множество $\mathfrak{B}$ подмножеств множества X, удовлетворяющее аксиомам (B_I) и (B_{II}), называется базисом порождаемого им фильтра. Два таких базиса называются эквивалентными, если они порождают один и тот же фильтр.*

Если $\mathfrak{G}$ — система образующих фильтра $\mathfrak{F}$, то множество $\mathfrak{G}'$ *пересечений всевозможных конечных семейств* множеств из $\mathfrak{G}$ есть *базис* фильтра $\mathfrak{F}$ (n° 2).

Предложение 3. *Для того чтобы подмножество $\mathfrak{B}$ фильтра $\mathfrak{F}$ в X было базисом этого фильтра, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из $\mathfrak{F}$ содержало некоторое множество из $\mathfrak{B}$.*

Условие, очевидно, необходимо; оно и достаточно, ибо если оно выполнено, то множество всех подмножеств множества X, содержащих каждое какое-либо множество из $\mathfrak{B}$, совпадает с $\mathfrak{F}$ в силу (F_I).

Предложение 4. *Для того чтобы фильтр $\mathfrak{F}'$ в X с базисом $\mathfrak{B}'$ мажорировал фильтр $\mathfrak{F}$ с базисом $\mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из $\mathfrak{B}$ содержало множество из $\mathfrak{B}'$.*

Это непосредственно вытекает из определений 2 и 3.

Следствие. *Для того чтобы базисы фильтра* $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{B}'$ *в множестве* X *были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из* $\mathfrak{B}$ *содержало некоторое множество из* $\mathfrak{B}'$ *и всякое множество из* $\mathfrak{B}'$ *содержало некоторое множество из* $\mathfrak{B}$.

Примеры базисов фильтра. 1) Пусть X — топологическое пространство; базисы фильтра окрестностей точки $x \in X$ — не что иное, по предложению 3, как *фундаментальные системы окрестностей* этой точки (§ 1, определение 5).

2) Пусть X — непустое множество, предупорядоченное и *фильтрующееся* по отношению (σ) (Теор. множ., гл. III, § 1, n° 10); *сечением* множества X относительно его элемента a называется множество $S(a)$ тех $x \in X$, для которых $a(\sigma)x$. *Множество* $\mathfrak{S}$ *сечений множества* X есть *базис фильтра*: в самом деле, очевидно, оно удовлетворяет условию (B_{II}); с другой стороны, каковы бы ни были элементы a и b из X, в силу предположения существует такой элемент $c \in X$, что $a(\sigma)c$ и $b(\sigma)c$, откуда $S(c) \subset S(a) \cap S(b)$, чем доказано (B_I). Фильтр, порождаемый базисом $\mathfrak{S}$, называется *фильтром сечений* фильтрующегося множества X.

Например, *фильтр Фреше* (n° 1) есть фильтр сечений в упорядоченном множестве $\mathbf{N}$, рассматриваемом как множество, фильтрующееся по отношению $\leqslant$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — фильтр в некотором множестве Z; так как (в силу аксиомы (F_{II})) $\mathfrak{F}$ есть множество, фильтрующееся по отношению $\supset$, то в $\mathfrak{F}$ можно определить *фильтр сечений*, понимая здесь под сечением относительно $A \in \mathfrak{F}$ множество $S(A)$ всех $M \in \mathfrak{F}$, содержащихся в A. Этот фильтр называется *фильтром сечений фильтра* $\mathfrak{F}$.

4. Ультрафильтры

Определение 4. *Ультрафильтром в множестве* X *называют всякий фильтр в* X, *не мажорируемый никаким отличным от него фильтром в* X (другими словами, *максимальный* элемент упорядоченного множества всех фильтров в X).

Поскольку упорядоченное множество всех фильтров в X индуктивно (следствие 3 предложения 1), из теоремы Цорна (Теор.

множ., Сводка результ., § 6, n° 10) вытекает следующая теорема:

Теорема 1. *Каждый фильтр $\mathfrak{F}$ в множестве X мажорируется некоторым ультрафильтром.*

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр в множестве X. Если A и B — такие подмножества множества X, что $A \cup B \in \mathfrak{F}$, то $A \in \mathfrak{F}$ или $B \in \mathfrak{F}$.*

Рассуждая от противного, предположим, что $A \notin \mathfrak{F}$, $B \notin \mathfrak{F}$, но $A \cup B \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех $M \subset X$ таких, что $A \cup M \in \mathfrak{F}$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $\mathfrak{G}$ — фильтр в X. При этом $\mathfrak{G}$ сильнее $\mathfrak{F}$, ибо $B \in \mathfrak{G}$. Но это противоречит тому, что $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр.

Следствие. *Если объединение конечной последовательности $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ подмножеств множества X принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{F}$, то по крайней мере одно из A_i принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Достаточно применить индукцию по n.

В частности, если $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ есть *покрытие* множества X, то по крайней мере одно A_i принадлежит $\mathfrak{F}$.

Предложение 5 *характеризует* ультрафильтры; более общим образом:

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{G}$ — система образующих некоторого фильтра в множестве X; если для любого $Y \subset X$ имеем $Y \in \mathfrak{G}$ или $\mathbf{C}Y \in \mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ — ультрафильтр в X.*

В самом деле, фильтр $\mathfrak{F}$, содержащий $\mathfrak{G}$ (существующий по предположению), должен совпадать с $\mathfrak{G}$, ибо если $Y \in \mathfrak{F}$, то $\mathbf{C}Y \notin \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathbf{C}Y \notin \mathfrak{G}$, откуда $Y \in \mathfrak{G}$.

Пример ультрафильтра. Множество всех подмножеств непустого множества X, содержащих элемент $a \in X$, есть ультрафильтр; в самом деле, это — фильтр, и, каково бы ни было $Y \subset X$, имеем $a \in Y$ или $a \in \mathbf{C}Y$. Такие ультрафильтры будут называться *тривиальными*.

Читатель сможет заметить, что, за исключением этого примера, мы никогда не доказываем существование ультрафильтра (даже в

счетно-бесконечном множестве) иначе как с помощью теоремы 1 (и, значит, используя аксиому выбора).

Замечание. Если множество X содержит по крайней мере два элемента, то в X имеется по крайней мере два различных ультрафильтра и, значит, упорядоченное множество всех фильтров в X не имеет наибольшего элемента.

Предложение 7. *Всякий фильтр $\mathfrak{F}$ в множестве X является пересечением всех мажорирующих его ультрафильтров.*

Ясно, что это пересечение содержит $\mathfrak{F}$. С другой стороны, пусть A — множество, не принадлежащее $\mathfrak{F}$, и $A' = \complement A$; так как A не содержит ни одного множества из $\mathfrak{F}$, то $M \cap A' \neq \varnothing$ для каждого $M \in \mathfrak{F}$; следовательно (следствие 1 предложения 1), существует фильтр $\mathfrak{F}'$, мажорирующий $\mathfrak{F}$ и содержащий A'. Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр, мажорирующий $\mathfrak{F}'$ (теорема 1); тогда $A \notin \mathfrak{U}$, что и завершает доказательство.

5. *Индуцированный фильтр*

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в множестве X и $A \subset X$. Для того чтобы след $\mathfrak{F}_A$ фильтра $\mathfrak{F}$ на A был фильтром в A, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из $\mathfrak{F}$ пересекалось с A.*

В самом деле, соотношение

$$(M \cap N) \cap A = (M \cap A) \cap (N \cap A)$$

показывает, что $\mathfrak{F}_A$ удовлетворяет аксиоме $(\mathrm{F_{II}})$. Точно так же, если $M \cap A \subset P \subset A$, то $P = (M \cup P) \cap A$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_A$ удовлетворяет аксиоме $(\mathrm{F_I})$. Для того чтобы $\mathfrak{F}_A$ удовлетворяло аксиоме $(\mathrm{F_{III}})$, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из $\mathfrak{F}$ имело непустое пересечение с A, и предложение доказано.

В частности, если $A \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_A$ есть фильтр в A в силу $(\mathrm{F_{II}})$ и $(\mathrm{F_{III}})$.

Определение 5. *Пусть A — подмножество множества X. Если след на A фильтра $\mathfrak{F}$ в X есть фильтр в A, то мы говорим, что этот фильтр индуцирован в A фильтром $\mathfrak{F}$.*

Если фильтр $\mathfrak{F}$ в X индуцирует фильтр в A, то след на A каждого базиса фильтра $\mathfrak{F}$ в силу предложения 3 есть базис фильтра $\mathfrak{F}_A$.

Пример. Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ и $x \in X$; для того чтобы след на A *фильтра окрестностей* $\mathfrak{V}$ точки x был фильтром в A, необходимо и достаточно, чтобы всякая окрестность x пересекала A, т. е. (§ 1, определение 10) чтобы x была *точкой прикосновения* для A.

Этот пример индуцированного фильтра интересен, с одной стороны, тем, что он играет важную роль в теории пределов (§ 7, n° 5), а с другой,— тем, что *всякий фильтр может быть определен таким способом*. В самом деле, пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в множестве X и X' — множество, полученное *присоединением* к X одного нового элемента ω, так что X отождествляется с дополнением к $\{\omega\}$ в X' (Теор. множ., Сводка результ., § 4, n° 5). Обозначим через $\mathfrak{F}'$ фильтр в X', образованный множествами $M \cup \{\omega\}$, где M пробегает $\mathfrak{F}$, и пусть $\mathfrak{V}(x)$ для каждой точки $x \neq \omega$ из X' есть множество всех подмножеств множества X', содержащих x, а $\mathfrak{V}(\omega) = \mathfrak{F}'$. Множества $\mathfrak{V}(x)$, где x пробегает X', очевидно, удовлетворяют аксиомам (V_I), (V_{II}), (V_{III}) и (V_{IV}) и определяют, следовательно, в X' топологию, для которой они служат фильтрами окрестностей; наконец, ω есть *точка прикосновения* множества X в этой топологии, а $\mathfrak{F}$ — фильтр, индуцируемый фильтром $\mathfrak{F}' = \mathfrak{V}(\omega)$ в X. Определенная так топология в X' (соотв. множество X', наделенное этой топологией) называется *топологией, ассоциированной с* $\mathfrak{F}$ (соотв. *топологическим пространством, ассоциированным с* $\mathfrak{F}$).

Предложение 9. *Для того чтобы ультрафильтр* $\mathfrak{U}$ *в множестве* X *индуцировал фильтр в множестве* $A \subset X$, *необходимо и достаточно, чтобы* $A \in \mathfrak{U}$; *если это условие выполнено, то* $\mathfrak{U}_A$ *есть ультрафильтр в* A.

Это — непосредственное следствие предложений 5 и 6.

6. Образ и прообраз базиса фильтра

Пусть $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в множестве X и f — отображение X в множество X'. Тогда $f(\mathfrak{B})$ — *базис фильтра* в X', ибо $M \neq \varnothing$ влечет $f(M) \neq \varnothing$, а $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$. Если $\mathfrak{B}_1$ — базис фильтра, *мажорирующего* фильтр с базисом $\mathfrak{B}$, то $f(\mathfrak{B}_1)$ есть базис фильтра, *мажорирующего* фильтр с базисом $f(\mathfrak{B})$ (предложение 4).

Предложение 10. *Если $\mathfrak{B}$ — базис ультрафильтра в множестве X и f — отображение X в X', то $f(\mathfrak{B})$ — базис ультрафильтра в X'.*

В самом деле, пусть $M' \subset X'$; если $\overset{-1}{f}(M')$ содержит некоторое множество M из $\mathfrak{B}$, то M' содержит $f(M)$; если же нет, то $\complement \overset{-1}{f}(M') = \overset{-1}{f}(\complement M')$ содержит некоторое множество N из $\mathfrak{B}$ (предложение 5), так что $\complement M'$ содержит $f(N)$. Таким образом, требуемое следует из предложения 6.

Рассмотрим, в частности, тот случай, когда f есть каноническая инъекция $A \to X$ подмножества A множества X. Если $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в A, то $f(\mathfrak{B})$ — базис фильтра в X. Мы будем говорить, что фильтр $\mathfrak{F}$ в X, порожденный базисом $f(\mathfrak{B})$, есть *фильтр, порождаемый $\mathfrak{B}$, рассматриваемым как базис фильтра в X*. Если $\mathfrak{B}$ — *базис ультрафильтра в A*, то, в силу предложения 10, $\mathfrak{B}$ будет также *базисом ультрафильтра в X*.

Выясним теперь, является ли *прообраз* базиса фильтра базисом фильтра. Пусть $\mathfrak{B}'$ — базис фильтра в X' и f — отображение X в X'. Из соотношения $\overset{-1}{f}(M' \cap N') = \overset{-1}{f}(M') \cap \overset{-1}{f}(N')$ и определения 3 непосредственно следует, что для того, чтобы $\overset{-1}{f}(\mathfrak{B}')$ было базисом фильтра в X, *необходимо и достаточно, чтобы $\overset{-1}{f}(M') \neq \varnothing$ для каждого $M' \in \mathfrak{B}'$*. Это условие можно также выразить, сказав, что *всякое множество из $\mathfrak{B}'$ пересекается с $f(X)$* (или еще, что след $\mathfrak{B}'$ на $f(X)$ есть базис фильтра). Отметим, что если оно выполнено, то $f(\overset{-1}{f}(\mathfrak{B}'))$ есть базис фильтра, *мажорирующего* фильтр с базисом $\mathfrak{B}'$.

Ясно, что если $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в X, то указанное выше условие выполняется для $\mathfrak{B}' = f(\mathfrak{B})$; $\overset{-1}{f}(f(\mathfrak{B}))$ есть тогда базис фильтра, *мажорируемого* фильтром с базисом $\mathfrak{B}$.

Пусть A — подмножество множества X и φ — каноническая инъекция $A \to X$. Если $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в X, то $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{B})$ есть не что иное, как $\mathfrak{B}_A$; выразив с помощью предыдущего условия, что это — базис фильтра в A, мы вновь получим часть предложения 8.

7. *Произведение фильтров*

Пусть $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство множеств, $\mathfrak{B}_\iota$ для каждого $\iota\in I$ — *базис фильтра* в X_ι и $\mathfrak{B}$ — множество подмножеств произведения $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$, имеющих вид $\prod_{\iota\in I} M_\iota$, где $M_\iota=X_\iota$ для всех кроме *конечного* числа индексов и $M_\iota\in\mathfrak{B}_\iota$ для тех ι, при которых $M_\iota\neq X_\iota$. В силу формулы $(\prod_{\iota\in I} M_\iota)\cap(\prod_{\iota\in I} N_\iota)=\prod_{\iota\in I}(M_\iota\cap N_\iota)$ непосредственно ясно, что $\mathfrak{B}$ — *базис фильтра* в X. Отметим, что фильтр с базисом $\mathfrak{B}$ порождается также множествами $\overset{-1}{\mathrm{pr}}_\varkappa(M_\varkappa)$, где $M_\varkappa\in\mathfrak{B}_\varkappa$, а $\varkappa$ пробегает I, ибо $\overset{-1}{\mathrm{pr}}_\varkappa(M_\varkappa)=M_\varkappa\times\prod_{\iota\neq\varkappa} X_\iota$.

Определение 6. *Пусть в каждом из множеств X_ι семейства $(X_\iota)_{\iota\in I}$ дан фильтр $\mathfrak{F}_\iota$. Мы называем произведением фильтров $\mathfrak{F}_\iota$ и обозначаем через $\prod_{\iota\in I}\mathfrak{F}_\iota$ (если это не может повлечь путаницы) фильтр в $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$, имеющий своим базисом множество всех подмножеств X вида $\prod_{\iota\in I} M_\iota$, где $M_\iota\in\mathfrak{F}_\iota$ для каждого $\iota\in I$ и $M_\iota=X_\iota$ для всех кроме конечного числа индексов ι.*

Читатель легко проверит, что произведение фильтров $\mathfrak{F}_\iota$ можно также определить как *слабейший* из фильтров $\mathfrak{G}$ в X, для которых $\mathrm{pr}_\iota(\mathfrak{G})=\mathfrak{F}_\iota$ при любом $\iota\in I$.

Предыдущие замечания показывают, что если $\mathfrak{B}_\iota$ для каждого $\iota\in I$ — базис фильтра $\mathfrak{F}_\iota$, то $\mathfrak{B}$ есть *базис* фильтра-произведения $\prod_{\iota\in I}\mathfrak{F}_\iota$ (предложение 3).

В произведении $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$ топологических пространств фильтром окрестностей произвольной точки $x=(x_\iota)$ является *произведение* фильтров окрестностей точек x_ι (§ 4, n° 1).

Конструкция произведения фильтров $\mathfrak{F}=\prod_{\iota\in I}\mathfrak{F}_\iota$ упрощается, когда множество индексов I *конечно*: тогда *всевозможные* произведения $\prod_{\iota\in I} M_\iota$, где $M_\iota\in\mathfrak{F}_\iota$ для любого $\iota\in I$, образуют базис фильтра $\mathfrak{F}$. Если $I=\{1, 2, \ldots, n\}$, то вместо $\prod_{\iota\in I}\mathfrak{F}_\iota$ пишут $\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2\times\ldots\times\mathfrak{F}_n$.

8. Элементарные фильтры

Определение 7. *Пусть* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — *бесконечная последовательность элементов множества* X; *элементарным фильтром, ассоциированным с последовательностью* (x_n), *называется фильтр, порожденный образом фильтра Фреше* (n° 1) *при отображении* $n \mapsto x_n$ *множества* $\mathbf{N}$ *в* X.

Другими словами, элементарный фильтр, ассоциированный с последовательностью (x_n),— это множество всех таких $M \subset X$, что $x_n \in M$ для всех кроме *конечного* числа значений n. Множества S_n тех x_p, для которых $p \geqslant n$, образуют *базис* элементарного фильтра, ассоциированного с последовательностью (x_n).

Элементарный фильтр, ассоциированный с бесконечной *подпоследовательностью* последовательности (x_n), *мажорирует* элементарный фильтр, ассоциированный с (x_n) (см. упражнение 15).

По самому определению, всякий элементарный фильтр обладает *счетным* базисом. Обратно:

Предложение 11. *Если фильтр* $\mathfrak{F}$ *обладает счетным базисом, то он является пересечением всех мажорирующих его элементарных фильтров.*

В самом деле, расположим счетный базис фильтра $\mathfrak{F}$ в последовательность $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$; множества $B_n = \bigcap_{p=0}^{n} A_p$ тоже образуют базис фильтра $\mathfrak{F}$ (предложение 3), причем $B_{n+1} \subset B_n$ для каждого n. Пусть a_n — произвольный элемент из B_n; ясно, что $\mathfrak{F}$ мажорируется фильтром, ассоциированным с (a_n). Таким образом, пересечение $\mathfrak{J}$ всех элементарных фильтров, мажорирующих $\mathfrak{F}$, существует и, очевидно, мажорирует $\mathfrak{F}$. Если бы оно было *сильнее* $\mathfrak{F}$, то существовало бы множество $M \in \mathfrak{J}$ такое, что $B_n \cap \complement M \neq \varnothing$ при любом n; взяв по элементу b_n из каждого $B_n \cap \complement M$, мы получили бы, что фильтр, ассоциированный с последовательностью (b_n), мажорирует $\mathfrak{F}$ и не содержит множества M, в противоречие с определением $\mathfrak{J}$.

Замечание. Фильтр, *мажорируемый* фильтром со счетным базисом, вполне может не иметь счетного базиса. Например, если X — несчетное бесконечное множество, то фильтр дополнений к конечным подмножествам множества X не имеет счетного базиса (иначе

множество всех конечных подмножеств множества X было бы счетным, что противоречит предположению); однако этот фильтр мажорируется всяким элементарным фильтром в X, ассоциированным с бесконечной последовательностью попарно различных элементов.

9. *Ростки относительно фильтра*

Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в множестве X. В множестве $\mathfrak{P}(X)$ всевозможных подмножеств множества X отношение R между M и N:

«существует такое $V \in \mathfrak{F}$, что $M \cap V = N \cap V$»

есть *отношение эквивалентности*; в самом деле, очевидно, оно рефлексивно и симметрично, а если M, N, P — такие подмножества множества X, что $M \cap V = N \cap V$ и $N \cap W = P \cap W$ для некоторых множеств V, W из $\mathfrak{F}$, то $M \cap (V \cap W) = N \cap (V \cap W) = P \cap (V \cap W)$, чем транзитивность R и доказана, поскольку $V \cap W \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathrm{mod} R$ множества $M \subset X$ называется *ростком этого множества относительно фильтра* $\mathfrak{F}$, а фактормножество $\mathfrak{P}(X)/R$ — *множеством ростков подмножеств множества* X (*относительно фильтра* $\mathfrak{F}$).

Отображения $(M, N) \mapsto M \cap N$ и $(M, N) \mapsto M \cup N$ произведения $\mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$ в $\mathfrak{P}(X)$ согласуются с отношениями эквивалентности $R \times R$ и R (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 8). В самом деле, если $M \equiv M' \pmod{R}$ и $N \equiv N' \pmod{R}$, то в $\mathfrak{F}$ существуют такие V и W, что $M \cap V = M' \cap V$ и $N \cap W = N' \cap W$, откуда $(M \cap N) \cap (V \cap W) = (M' \cap N') \cap (V \cap W)$ и $(M \cup N) \cap (V \cap W) = (M \cap (V \cap W)) \cup (N \cap (V \cap W)) = (M' \cap (V \cap W)) \cup (N' \cap (V \cap W)) = (M' \cup N') \cap (V \cap W)$. Отображения $(\mathfrak{P}(X)/R) \times (\mathfrak{P}(X)/R)$ в $\mathfrak{P}(X)/R$, получаемые факторизацией из указанных двух отображений, будем (допуская вольность) обозначать $(\xi, \eta) \mapsto \xi \cap \eta$ и $(\xi, \eta) \mapsto \xi \cup \eta$. Непосредственно проверяется, что относительно этих (всюду определенных) законов композиции каждый элемент идемпотентен и что они коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны друг относительно друга. Кроме того, отношения $\xi = \xi \cap \eta$ и $\eta = \xi \cup \eta$ эквивалентны; будем (допуская вольность) пользоваться для них записью $\xi \subset \eta$; легко видеть, что это есть отношение *порядка* в $\mathfrak{P}(X)/R$, относительно которого $\mathfrak{P}(X)/R$ является *решеткой*, имеющей наименьшим элементом росток $\varnothing$ и наибольшим элементом росток X; отметим, кроме того, что отношение $\xi \subset \eta$ означает, что существуют $M \in \xi$, $N \in \eta$ и $V \in \mathfrak{F}$, для которых $M \cap V \subset N \cap V$.

Пусть теперь X' — второе множество и Φ — множество всех отображений в X' подмножеств множества X, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Отношение S между f и g:

«существует такое $V \in \mathfrak{F}$, что f и g определены и совпадают на V»

есть *отношение эквивалентности* в Φ; в самом деле, очевидно, оно рефлексивно и симметрично; кроме того, оно транзитивно, ибо если f и g определены и совпадают на $V \in \mathfrak{F}$, а g и h определены и совпадают на $W \in \mathfrak{F}$, то f и h определены и совпадают на $V \cap W \in \mathfrak{F}$. Класс mod S отображения f множества $V \in \mathfrak{F}$ в X' называется *ростком отображения* f (*относительно* $\mathfrak{F}$), а фактормножество $\tilde{\Phi} = \Phi/S$ — *множеством ростков* (*относительно* $\mathfrak{F}$) *отображений* X *в* X'.

Замечания. 1) Всякое отображение f части $M \in \mathfrak{F}$ множества X в X' эквивалентно mod S некоторому отображению f_1 всего X в X' (что оправдывает предыдущую терминологию); в самом деле, достаточно продолжить f на X, придав ему, например, постоянное значение на $X - M$.

2) Для того чтобы *характеристические функции* φ_M и φ_N подмножеств M и N множества X имели один и тот же росток относительно $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы M и N имели один и тот же росток относительно $\mathfrak{F}$.

Пусть X'' — третье множество, φ — отображение X' в X'' и Φ' — множество всех отображений в X'' подмножеств множества X, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Для любого отображения $f \in \Phi$ композиция $\varphi \circ f$ принадлежит Φ'; при этом ясно, что если $g \in \Phi$ имеет тот же росток относительно $\mathfrak{F}$, что и f, то $\varphi \circ f$ и $\varphi \circ g$ имеют один и тот же росток относительно $\mathfrak{F}$; этот росток зависит, следовательно, только от ростка $\tilde{f}$ отображения f относительно $\mathfrak{F}$ и будет обозначаться $\varphi(\tilde{f})$. Тем самым определено отображение (допуская вольность, мы обозначаем его φ) множества $\tilde{\Phi}$ всех ростков отображений X в X' в множество $\tilde{\Phi}'$ всех ростков отображений X в X''.

Пусть теперь X_i' $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — множества, $Y = \prod_{i=1}^{n} X_i'$ — их произведение; обозначим через Φ_i (соотв. Φ) множество всех отобра-

жений в X_i' (соотв. в Y) подмножеств множества X, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Если $f_i \in \Phi_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, а $M_i \in \mathfrak{F}$ — область определения f_i, то отображение $t \mapsto (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ определено на $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$ и, следовательно, принадлежит Φ; мы будем обозначать его (допуская вольность) через $(f_1, \ldots, f_n)$. При этом, если f_i и g_i принадлежат Φ_i и имеют один и тот же росток относительно $\mathfrak{F}$ (для $1 \leqslant i \leqslant n$), то ясно, что $(f_1, \ldots, f_n)$ и $(g_1, \ldots, g_n)$ имеют один и тот же росток относительно $\mathfrak{F}$; этот росток зависит, следовательно, только от ростков $\tilde{f}_i$ отображений f_i. Если обозначить его через $\Gamma(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$, то, очевидно, Γ будет *биекцией* произведения $\prod_{i=1}^{n} \tilde{\Phi}_i$ на множество $\tilde{\Phi}$, где через $\tilde{\Phi}_i$ (соотв. $\tilde{\Phi}$) обозначено множество всех ростков относительно $\mathfrak{F}$ отображений X в X_i' (соотв. в Y); допуская вольность, мы будем обычно там, где это не может повлечь путаницы, вместо $\Gamma(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$ писать $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$.

Таким образом, согласно предыдущему, всякое отображение ψ произведения Y в множество X'' определяет отображение $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n) \mapsto \psi(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$ произведения $\prod_{i=1}^{n} \tilde{\Phi}_i$ в множество $\tilde{\Phi}'$ всех ростков отображений X в X''.

В частности, если $I = \{1, 2\}$, а X_1', X_2' и X'' равны все одному и тому же множеству X' (так что ψ — всюду определенный *закон композиции* на X'), то ψ порождает всюду определенный закон композиции на множестве $\tilde{\Phi}$ всех ростков отображений X в X'. Легко видеть, что если закон ψ, заданный на X', ассоциативен (соотв. коммутативен), то то же справедливо и для соответствующего закона в $\tilde{\Phi}$; если закон ψ на X' обладает нейтральным элементом e', то росток относительно $\mathfrak{F}$ постоянного отображения $x \mapsto e'$ есть нейтральный элемент для соответствующего закона на $\tilde{\Phi}$. Наконец, если X' обладает нейтральным элементом e', то для того, чтобы росток $\tilde{f}$ элемента $f \in \Phi$ был обратим в $\tilde{\Phi}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $V \in \mathfrak{F}$, содержащееся в области определения f, что $f(t)$ обратимо в X' для каждого $t \in V$; если обозначить обращение $f(t)$ для каждого $t \in V$ через $g(t)$, то росток $\tilde{g}$ отображения g будет тогда обращением $\tilde{f}$ в $\tilde{\Phi}$,

В частности, если X' есть *группа* относительно закона ψ, то и $\tilde{\Phi}$ будет группой относительно соответствующего закона; так же доказывается, что если X' — *кольцо* (соотв. *алгебра* над кольцом A), то $\tilde{\Phi}$ — кольцо (соотв. алгебра над A) относительно соответствующих законов композиции.

10. *Ростки в точке*

Один из особенно часто встречающихся случаев, когда применяются определения и результаты n° 9, это тот, где $\mathfrak{F}$ есть *фильтр окрестностей* некоторой точки a топологического пространства X; вместо «*ростки относительно* $\mathfrak{F}$» тогда говорят «*ростки в точке* a». Отметим, что в этом случае существует только один росток *окрестностей* точки a, а именно, всего пространства X. Ростки *замкнутых* множеств совпадают с ростками множеств, *локально замкнутых в точке* a, ибо если L локально замкнуто в точке a, то ростки множеств L и $\overline{L}$ в точке a совпадают (§ 3, предложение 1). Отсюда следует, что если ξ, η — ростки множеств, локально замкнутых в точке a, то $\xi \cup \eta$ и $\xi \cap \eta$ тоже являются такими ростками.

Так как a принадлежит всякому множеству $V \in \mathfrak{F}$, то $f(a)$ определено для любого f, область определения которого принадлежит $\mathfrak{F}$; при этом, если f и g имеют один и тот же росток в точке a, то необходимо $f(a)=g(a)$, так что $f(a)$ зависит только от ростка $\tilde{f}$ отображения f в точке a; оно называется *значением* $\tilde{f}$ в точке a и обозначается $\tilde{f}(a)$. Отметим, что вообще отношение $\tilde{f}(a)=\tilde{g}(a)$ ни в коей мере не влечет $\tilde{f}=\tilde{g}$.

Пусть X' и X'' — топологические пространства, b — точка из X', g и g' — отображения $X' \to X''$, имеющие один и тот же росток в точке b. Если f и f' — отображения X в X', *непрерывные* в точке a, обладающие одним и тем же ростком в этой точке и такие, что $f(a)=b$, то $g \circ f$ и $g' \circ f'$ имеют *один и тот же росток в точке* a; в самом деле, пусть V' — такая окрестность точки b, что $g(x')=g'(x')$ для всех $x' \in V'$; тогда существует окрестность V точки a такая, что $f(V) \subset V'$, $f'(V) \subset V'$ и $f(x)=f'(x)$ для всех $x \in V$, откуда и вытекает наше утверждение. Росток отображения $g \circ f$ в точке a называется *композицией* ростков $\tilde{g}$ и $\tilde{f}$ отображений g и f и обозначается $\tilde{g} \circ \tilde{f}$.

Упражнения

1) Найти все фильтры в конечном множестве.

2) Показать, что если пересечение всех множеств фильтра $\mathfrak{F}$, заданного в множестве X, пусто, то $\mathfrak{F}$ мажорирует фильтр дополнений конечных подмножеств множества X.

3) Пересечение фильтров $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, заданных в одном и том же множестве X, есть множество всех его подмножеств вида $M \cup N$, где M пробегает $\mathfrak{F}$, а N пробегает $\mathfrak{G}$.

4) Показать, что фильтр дополнений конечных подмножеств бесконечного множества X является пересечением элементарных фильтров, ассоциированных со всевозможными бесконечными последовательностями попарно различных элементов из X.

5) Показать, что если фильтры $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, заданные в множестве X, обладают верхней гранью в множестве всех фильтров в X, то эта верхняя грань есть множество всех подмножеств вида $M \cap N$, где M пробегает $\mathfrak{F}$, а N пробегает $\mathfrak{G}$.

6) Пусть каждому фильтру в множестве X сопоставлена ассоциированная с ним топология (n° 5) в *одном и том же* множестве $X' = X \cup \{\omega\}$. Справедливы следующие предложения:

а) Если некоторая топология в X' мажорирует топологию, ассоциированную с фильтром $\mathfrak{F}$, то эта топология либо дискретная, либо ассоциирована с фильтром, мажорирующим $\mathfrak{F}$. И обратно.

б) Нижняя грань топологий, ассоциированных с фильтрами из некоторого множества Ф фильтров в X, есть топология, ассоциированная с пересечением всех фильтров из Ф.

в) Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторое множество подмножеств из X, $\mathfrak{G}'$ — множество всех подмножеств из X' вида $M \cup \{\omega\}$, где M пробегает $\mathfrak{G}$, и $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}' \cup \mathfrak{P}(X)$. Если $\mathfrak{G}$ порождает фильтр $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}$ порождает в X' топологию, ассоциированную с $\mathfrak{F}$. Какую топологию порождает $\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{G}$ не является системой образующих никакого фильтра?

г) Для того чтобы $\mathfrak{F}$ было ультрафильтром в X, необходимо и достаточно, чтобы ассоциированная с ним топология в X' была X-максимальной (§ 3, упражнение 11).

7) В топологическом пространстве X пересечение фильтров окрестностей всех точек непустого множества $A \subset X$ есть фильтр окрестностей этого множества в X.

8) а) Пусть Ф — некоторое множество топологий в множестве X. Показать, что фильтр окрестностей точки $x \in X$ в пересечении всех топологий из Ф мажорируется пересечением фильтров окрестностей точки x в топологиях из Ф.

б) Рассмотрим в множестве $\mathbf{Q}^2$ лексикографический порядок (Теор. множ., гл. III, § 2, n° 6) и топологию $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_0(\mathbf{Q}^2)$, соответствующую этой структуре совершенно упорядоченного множества (§ 2, упражнение 7); пусть $\mathscr{T}_2$ — топология в $\mathbf{Q}^2$, получаемая переносом $\mathscr{T}_1$

посредством симметрии $(\xi, \eta) \longmapsto (\eta, \xi)$, и $\mathscr{T}$ — пересечение топологий $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$. Показать, что фильтр окрестностей точки в топологии $\mathscr{T}$ слабее пересечения фильтров ее окрестностей в топологиях $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$.

*9) а) Показать, что всякий ультрафильтр, мажорирующий пересечение конечного числа фильтров, мажорирует по крайней мере один из них. [Использовать предложение 5.]

б) Дать пример ультрафильтра, мажорирующего пересечение бесконечного семейства ультрафильтров, но не совпадающего ни с одним из ультрафильтров этого семейства. [Рассмотреть в бесконечном множестве X семейство всех ультрафильтров, имеющих своим базисом одноточечное множество.]

×10) Показать, что пересечение множеств, образующих ультрафильтр, содержит не более одной точки и что если оно состоит из одной точки, то ультрафильтр образован всеми множествами, содержащими эту точку. [Использовать предложение 5.]

11) Показать, что если подмножество A множества X не принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{U}$, заданному в X, то следом $\mathfrak{U}$ на A служит $\mathfrak{P}(A)$.

12) Показать, что в бесконечном множестве элементарный фильтр, ассоциированный с последовательностью, члены которой попарно различны, не является ультрафильтром.

13) Пусть f — отображение множества X в множество X'. Для того чтобы для любого базиса фильтра $\mathfrak{B}$ в X множество $f(f^{-1}(\mathfrak{B}))$ было базисом фильтра, эквивалентным $\mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы f было инъективно.

× 14) Показать, что если отображение $f\colon X \to X'$ сюръективно, то образ $f(\mathfrak{F})$ всякого фильтра $\mathfrak{F}$ из X есть фильтр в X'.

*15) Пусть $n \longmapsto f(n)$ — *сюръективное* отображение $\mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$ такое, что $f^{-1}(m)$ *конечно* для любого $m \in \mathbf{N}$. Возьмем произвольную последовательность (x_n) элементов какого-либо множества X и положим $y_n = x_{f(n)}$. Показать, что элементарные фильтры, ассоциированные с последовательностями (x_n) и (y_n), совпадают.

Вывести отсюда, что если (a_n) и (b_n) — такие последовательности элементов из X, что фильтр, ассоциированный с (b_n), мажорирует фильтр, ассоциированный с (a_n), то фильтр, ассоциированный с (b_n), совпадает с фильтром, ассоциированным с некоторой подпоследовательностью последовательности (a_n).

*16) Пусть Φ — счетное совершенно упорядоченное множество элементарных фильтров в множестве X. Показать, что существует элементарный фильтр, мажорирующий все фильтры из Φ. [Показать, что объединение всех фильтров из Φ обладает счетным базисом.]

17) Пусть X — *решетка* (Теор. множ., гл. III, § 1, n° 13). Непустое подмножество F множества X называется *предфильтром*,

если оно удовлетворяет следующим условиям: 1° каково бы ни было $x \in F$, отношение $y \geqslant x$ влечет $y \in F$; 2° если $x \in F$ и $y \in F$, то $\inf(x, y) \in F$; 3° $F \neq X$.

Таким образом, в множестве всех подмножеств множества Y, упорядоченном по включению, предфильтры — это фильтры в Y. Предфильтр F называется *простым*, если отношение $\sup(x, y) \in F$ влечет $x \in F$ или $y \in F$. Предфильтр относительно противоположного порядка называется *копредфильтром* в X.

а) Множество всех мажорант множества $A \subset X$, не сводящегося к наименьшему элементу из X, есть предфильтр. Дать примеры предфильтров, которые не были бы множествами мажорант.

б) Показать, что если F — простой предфильтр, то $\complement F$ — простой копредфильтр.

в) Показать, что если X обладает наименьшим элементом 0, то всякий предфильтр содержится в некотором максимальном предфильтре. [Использовать теорему Цорна, учтя, что 0 не принадлежит ни одному предфильтру.]

г) Найти все предфильтры в совершенно упорядоченном множестве X и показать, что все они простые. Получить отсюда примеры немаксимальных простых предфильтров.

д) Пусть X — упорядоченное множество, состоящее из пяти элементов 0, 1, a, b, c, связанных отношениями порядка $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$. Показать, что X — решетка и что предфильтры, отличные от $\{1\}$, являются максимальными, но не простыми.

е) Пусть X — решетка, обладающая наименьшим элементом 0. Показать, что если $F \subset X$ — предфильтр и a — элемент из X, не принадлежащий F, то для того, чтобы существовал предфильтр, содержащий F и a, необходимо и достаточно, чтобы $\inf(a, x) \neq 0$ для всех $x \in F$; наименьшим предфильтром, содержащим F и a, является тогда множество тех $y \in X$, для которых $y \geqslant \inf(a, x)$ хотя бы при одном $x \in F$.

*18) Пусть X — *дистрибутивная* решетка (Теор. множ., глава III, § 1, упражнение 16), обладающая наименьшим элементом 0.

а) Показать, что если a — неприводимый элемент из X (Теор. множ., гл. III, § 4, упражнение 7), то множество его мажорант есть простой предфильтр. Дать пример простого предфильтра, не являющегося множеством мажорант неприводимого элемента. [См. упражнение 17г.]

б) Показать, что всякий максимальный предфильтр в X — простой. [Использовать упражнение 17е.] Дать примеры немаксимальных простых предфильтров в дистрибутивной решетке. [Упражнение 17г.]

в) Показать, что всякий предфильтр F есть пересечение всех содержащих его простых предфильтров. [Используя упражнение 17е, показать, что если $a \notin F$, то максимальный элемент U в множестве всех

предфильтров, содержащих F и не содержащих a, есть простой предфильтр.]

г) Пусть Ω — множество всех простых предфильтров в X. Сопоставим каждому элементу $x \in X$ подмножество A_x множества Ω, состоящее из всех простых предфильтров F, содержащих x. Показать, что $x \mapsto A_x$ есть инъективное возрастающее отображение X в $\mathfrak{P}(\Omega)$ и что $A_{\inf(x,y)} = A_x \cap A_y$ и $A_{\sup(x,y)} = A_x \cup A_y$.

19) Пусть X — решетка, обладающая наименьшим элементом; показать, что если всякий предфильтр в X есть пересечение содержащих его простых предфильтров, то X дистрибутивна. [Заметить, что отображение $x \mapsto A_x$, определенное как в упражнении 18г, обладает всеми перечисленными там свойствами.]

*20) Решетку X называют *булевой алгеброй*, если она дистрибутивна, обладает наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1, и для любого $x \in X$ существует такой элемент $x' \in X$, что $\inf(x, x') = 0$, а $\sup(x, x') = 1$; элемент x' называется *дополнением* к x в X.

а) Пусть $x \mapsto A_x$ — инъективное отображение булевой алгебры X в множество всех подмножеств множества Ω всех простых предфильтров в X, определенное в упражнении 18г; показать, что если x' — дополнение к x в X, то $A_{x'} = \complement A_x$ в Ω; вывести отсюда, что всякий элемент x имеет только одно дополнение x', что дополнением к x' служит x, а дополнением к $\inf(x, y)$ является $\sup(x, y)$; дать прямые доказательства этих свойств. Показать, что элемент $d(x, y) = \inf(y, x')$ обладает всеми свойствами, перечисленными в упражнении 18ж § 8 гл. I Алгебры; отличные от A идеалы булева кольца A, отвечающего X, суть копредфильтры в X.

б) Показать, что в булевой алгебре X всякий простой предфильтр максимален. [Заметить, что, каково бы ни было $x \in X$, простой предфильтр всегда содержит x или его дополнение.]

в) Обратно, пусть X — дистрибутивная решетка с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1, такая, что всякий простой предфильтр в X максимален; показать, что тогда X есть булева алгебра. [Взяв $x \in X$, рассмотреть копредфильтр C (упражнение 17), образованный теми $y \in X$, для которых $\inf(x, y) = 0$; если x не имеет дополнения, то существует максимальный копредфильтр M, содержащий x и C; учесть, что дополнение U к M в X есть простой предфильтр (упражнения 17б и 18б), и использовать упражнение 17е.]

г) Показать, что множество $\mathfrak{B}$ всех открыто-замкнутых подмножеств топологического пространства X, упорядоченное по включению, является булевой алгеброй. Показать, что если за X взято топологическое пространство, ассоциированное с фильтром Фреше (n° 5), то соответствующая булева алгебра $\mathfrak{B}$ счетно бесконечна и потому не может быть изоморфной упорядоченному множеству $\mathfrak{P}(A)$ всех подмножеств какого-либо множества A.

§ 7. Пределы

1. *Предел фильтра*

Определение 1. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{F}$ — фильтр в X. Точку $x \in X$ называют пределом фильтра $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F}$ мажорирует фильтр $\mathfrak{V}(x)$ окрестностей этой точки; тогда говорят также, что $\mathfrak{F}$ сходится к x. Точку x называют пределом базиса фильтра $\mathfrak{B}$ в X* (и говорят, что $\mathfrak{B}$ *сходится к x*), *если фильтр с базисом $\mathfrak{B}$ сходится к x.*

Это определение и предложение 4 § 6 приводят к следующему критерию:

Предложение 1. *Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}$ в топологическом пространстве X сходился к точке $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из фундаментальной системы окрестностей точки x содержало множество из $\mathfrak{B}$.*

> В согласии с терминологией, введенной в n° 2 § 1, предложению 1 можно придать следующую форму: для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}$ сходился к x, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathfrak{B}$ имелись множества, *сколь угодно близкие* к x.

Если фильтр $\mathfrak{F}$ сходится к x, то в силу определения 1 всякий фильтр, *мажорирующий* $\mathfrak{F}$, тоже сходится к x. Точно так же, если заменить топологию в X *более слабой* топологией, то фильтр окрестностей точки x заменится *мажорируемым* им фильтром (§ 2, предложение 3) и, следовательно, фильтр $\mathfrak{F}$ будет сходиться к x и в этой новой топологии.

> Выражаясь образно, можно, таким образом, сказать, что *чем сильнее топология, тем меньше фильтров, сходящихся в этой топологии*. В частности, для дискретной топологии сходящимися фильтрами являются только фильтры окрестностей, ибо последние суть тривиальные ультрафильтры в X (§ 6, n° 4).

Пусть Ф — некоторое множество фильтров в X, сходящихся к одной и той же точке x. Так как фильтр окрестностей $\mathfrak{V}(x)$ мажорируется каждым фильтром из Ф, то $\mathfrak{V}(x)$ мажорируется и их *пересечением* $\mathfrak{I}$; иначе говоря, $\mathfrak{I}$ тоже сходится к x.

Предложение 2. *Для того чтобы фильтр $\mathfrak{F}$ в топологическом пространстве X сходился к точке x, необходимо и достаточно, чтобы всякий ультрафильтр, мажорирующий $\mathfrak{F}$, сходился к x.*

Это сразу следует из предыдущего и предложения 7 § 6.

Отметим, что вообще фильтр может обладать *несколькими различными пределами*; мы вернемся к этому вопросу в n° 1 § 8.

2. Точка прикосновения базиса фильтра

Определение 2. *Говорят, что x есть точка прикосновения базиса фильтра $\mathfrak{B}$ в топологическом пространстве X, если x является точкой прикосновения для каждого множества из $\mathfrak{B}$.*

Если x есть точка прикосновения базиса фильтра $\mathfrak{B}$, то в силу следствия предложения 4 § 6 она будет также точкой прикосновения всякого *эквивалентного* ему базиса фильтра и, в частности, *фильтра* с базисом $\mathfrak{B}$.

Предложение 3. *Для того чтобы точка x была точкой прикосновения базиса фильтра $\mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из фундаментальной системы окрестностей точки x пересекалось с любым множеством из $\mathfrak{B}$.*

Вытекает непосредственно из определений.

Это предложение и следствие 2 предложения 1 § 6 показывают, что свойство «x есть точка прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$» равносильно свойству «существует фильтр, мажорирующий одновременно фильтр $\mathfrak{F}$ и фильтр окрестностей точки x». Иначе говоря,

Предложение 4. *Для того чтобы точка x была точкой прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал фильтр, мажорирующий $\mathfrak{F}$ и сходящийся к x.*

В частности, всякий *предел* фильтра $\mathfrak{F}$ есть его *точка прикосновения*.

Следствие. *Для того чтобы ультрафильтр $\mathfrak{U}$ сходился к точке x, необходимо и достаточно, чтобы x была его точкой прикосновения.*

Если x есть точка прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$, то она является также точкой прикосновения всякого *мажорируемого* им фильтра. Точно так же, если заменить топологию в X *более слабой*, то x останется точкой прикосновения для $\mathfrak{F}$ и в этой новой топологии.

Множество всех точек прикосновения базиса фильтра $\mathfrak{B}$ в X есть по определению множество $\bigcap_{M \in \mathfrak{B}} \overline{M}$; отсюда

Предложение 5. *Множество всех точек прикосновения базиса фильтра в топологическом пространстве X замкнуто в X.*

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в подмножестве A топологического пространства X. Каждая точка прикосновения этого базиса $\mathfrak{B}$ в X принадлежит $\overline{A}$. Обратно, каждая точка из $\overline{A}$ есть предел в X некоторого фильтра, заданного в A.*

Первое утверждение очевидно. С другой стороны, если $x \in \overline{A}$, то след на A фильтра окрестностей точки x в X есть фильтр в A, очевидно, сходящийся к x.

Замечание. Фильтр в топологическом пространстве не всегда имеет точку прикосновения (и тем более предел); так, например, в *бесконечном дискретном пространстве* фильтр дополнений конечных множеств не имеет ни одной точки прикосновения. Пространства, в которых всякий фильтр имеет точку прикосновения, играют очень важную роль в математике; мы будем изучать их в § 9.

3. *Предел и предельная точка функции*

Определение 3. *Пусть f — отображение множества X в топологическое пространство Y и $\mathfrak{F}$ — фильтр в X. Точка $y \in Y$ называется пределом функции f по фильтру $\mathfrak{F}$, если базис фильтра $f(\mathfrak{F})$ сходится к y, и предельной точкой функции f по фильтру $\mathfrak{F}$, если y есть точка прикосновения базиса фильтра $f(\mathfrak{F})$.*

Отношение «y есть предел функции f по фильтру $\mathfrak{F}$» записывается так: $\lim_{\mathfrak{F}} f = y$, или $\lim_{x,\ \mathfrak{F}} f(x) = y$, или даже $\lim_{x} f(x) = y$, если это не может повести к недоразумению.

Из определения 3 и предложений 1 и 3 вытекают следующие критерии:

Предложение 7. *Для того чтобы $y \in Y$ было пределом функции f по фильтру $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности V точки y в Y существовало такое множество $M \in \mathfrak{F}$, что $f(M) \subset V$* (т. е. *чтобы $\overset{-1}{f}(V) \in \mathfrak{F}$ для любой окрестности V точки y*).

Для того чтобы y было предельной точкой функции f по фильтру $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности V точки y и любого множества $M \in \mathfrak{F}$ существовала такая точка $x \in M$, что $f(x) \in V$.

Примеры. 1) Последовательность точек $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ топологического пространства X есть отображение $n \mapsto x_n$ множества $\mathbf{N}$ в X. В анализе часто рассматривают понятия предела или предельной точки такого отображения *по фильтру Фреше* (§ 6, n° 1) в $\mathbf{N}$; если y есть предел отображения $n \mapsto x_n$ по фильтру Фреше, то говорят, что y есть *предел последовательности* (x_n) *при неограниченном возрастании* n (или что x_n *стремится к* y *при неограниченном возрастании* n), и пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = y$. Точно так же *предельной точкой последовательности* (x_n) называют всякую предельную точку отображения $n \mapsto x_n$ по фильтру Фреше.

Можно еще сказать, что точка $y \in X$ есть предел (соотв. предельная точка) последовательности (x_n) точек из X, если y является пределом (соотв. точкой прикосновения) *элементарного фильтра, ассоциированного с* (x_n) (§ 6, n° 8).

Для того чтобы y было пределом последовательности (x_n) в X, необходимо и достаточно, чтобы для *всякой* окрестности V точки y в X *все члены последовательности* (x_n), *за исключением конечного их числа, принадлежали* V, т. е. чтобы существовало такое целое число n_0, что $x_n \in V$ для всех $n \geqslant n_0$. Точно так же, для того чтобы y было предельной точкой последовательности (x_n), необходимо и достаточно, чтобы для *всякой* окрестности V точки y и *всякого* целого числа n_0 существовало такое целое число $n \geqslant n_0$, что $x_n \in V$.

Важно тщательно отличать понятие *предельной точки последовательности* от понятия *точки прикосновения множества точек последовательности*; всякая предельная точка есть вместе с тем точка прикосновения множества точек последовательности, но обратное неверно.

2) Более общим образом, пусть f — отображение *фильтрующегося* множества A в топологическое пространство X. Если $x \in X$ есть предел (соотв. предельная точка) отображения f по *фильтру сечений* множества A (§ 6, n° 3), то x называют *пределом* (соотв. *предельной точкой*) *функции* f *по фильтрующемуся множеству* A и пишут $x = \lim\limits_{z \in A} f(z)$.

Если y есть предел (соотв. предельная точка) отображения $f\colon X \to Y$ по фильтру $\mathfrak{F}$ в X, то y остается пределом (соотв. предельной точкой) отображения f по фильтру $\mathfrak{F}$ и при замене топологии в Y *более слабой*.

Точно так же, если y есть предел (соотв. предельная точка) отображения f по фильтру $\mathfrak{F}$, то y будет пределом (соотв. предельной точкой) отображения f и по любому *более сильному* (соотв. *более слабому*) фильтру.

Предложение 8. *Пусть f — отображение множества X в топологическое пространство Y; для того чтобы $y \in Y$ было предельной точкой отображения f по фильтру $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы y было пределом отображения f по некоторому фильтру $\mathfrak{G}$ в X, мажорирующему $\mathfrak{F}$.*

В самом деле, пусть y — предельная точка отображения f по $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{V}$ — фильтр ее окрестностей; тогда $\overset{-1}{f}(\mathfrak{V})$ есть базис фильтра в X, ибо каждое множество из $\overset{-1}{f}(\mathfrak{V})$ пересекается с каждым множеством из $\mathfrak{F}$ (§ 6, n° 6). Это замечание показывает, кроме того, что в X существует фильтр $\mathfrak{G}$, мажорирующий фильтр $\mathfrak{F}$ и фильтр с базисом $\overset{-1}{f}(\mathfrak{V})$ (§ 6, следствие 2 предложения 1), так что y есть предел отображения f по фильтру $\mathfrak{G}$.

Отметим, наконец, что если f — отображение множества X в топологическое пространство Y, то (возможно, пустое) множество всех предельных точек отображения f по фильтру $\mathfrak{F}$ в X *замкнуто* в Y (предложение 5).

Замечание. Если $y \in Y$ есть предел (соотв. предельная точка) отображения $f\colon X \to Y$ по фильтру $\mathfrak{F}$ в X, то y является

также пределом (соотв. предельной точкой) всякой функции $g\colon X \to Y$, обладающей *тем же ростком* относительно $\mathfrak{F}$ (§ 6, n° 9); y называется также *пределом* (соотв. *предельной точкой*) *ростка* $\tilde{f}$ функции f относительно $\mathfrak{F}$.

4. *Пределы и непрерывность*

Пусть X и Y — топологические пространства, f — отображение X в Y, $\mathfrak{V}$ — фильтр окрестностей в X точки $a \in X$. Для выражения того, что $y \in Y$ есть предел функции f по фильтру $\mathfrak{V}$, вместо записи $y = \lim_{\mathfrak{V}} f$ пользуются специальным обозначением

$$y = \lim_{x \to a} f(x)$$

и говорят, что y есть *предел функции f в точке a* или что $f(x)$ *стремится к y, когда x стремится к a*. Точно так же, вместо того чтобы называть y предельной точкой функции f по фильтру $\mathfrak{V}$, говорят, что y есть *предельная точка функции f в a*.

Из предложения 7 на основании определения непрерывности (§ 2, определение 1) получаем:

Предложение 9. *Для того чтобы отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y было непрерывно в точке $a \in X$, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Следствие 1. *Пусть X и Y — топологические пространства и f — отображение X в Y. Если f непрерывно в точке $a \in X$, то для каждого базиса фильтра $\mathfrak{B}$ в X, сходящегося к a, базис фильтра $f(\mathfrak{B})$ сходится к $f(a)$. Обратно, если для каждого ультрафильтра $\mathfrak{U}$ в X, сходящегося к a, базис ультрафильтра $f(\mathfrak{U})$ сходится к $f(a)$, то f непрерывно в точке a.*

Первое утверждение есть непосредственное следствие предложения 9. Для доказательства второго предположим, что f не непрерывно в точке a; тогда существует такая окрестность W точки $f(a)$ в Y, что $f^{-1}(W)$ не принадлежит фильтру $\mathfrak{V}$ окрестностей точки a в X. Следовательно (предложение 7 § 6), существует ультрафильтр $\mathfrak{U}$, мажорирующий $\mathfrak{V}$ и не содержащий $f^{-1}(W)$, а значит,

содержащий его дополнение $A=X-\overline{f(W)}^{-1}$ (предложение 5 § 6); так как $f(A)\cap W=\varnothing$, то $f(\mathfrak{U})$ не сходится к $f(a)$.

Следствие 2. *Пусть отображение g множества Z в топологическое пространство X обладает пределом a по фильтру $\mathfrak{F}$ в Z; если отображение $f\colon X\to Y$ непрерывно в точке a, то составное отображение $f\circ g$ обладает пределом $f(a)$ по фильтру $\mathfrak{F}$.*

5. Пределы относительно подпространства

Пусть X и Y — топологические пространства, $A\subset X$ и a — *точка прикосновения* множества A в X (не обязательно принадлежащая A). Пусть $\mathfrak{F}$ — *след* на A фильтра окрестностей точки a в X. Если f есть отображение множества A в Y, то вместо записи $y=\lim_{\mathfrak{F}} f$, означающей, что $y\in Y$ есть предел f по фильтру $\mathfrak{F}$, мы пишем

$$y=\lim_{x\to a,\ x\in A} f(x)$$

и говорим, что y есть *предел функции f в точке a относительно подпространства A* или что $f(x)$ стремится к y, когда x стремится к a, оставаясь в A. Отметим, что при этом $y\in\overline{f(A)}$.

Если $A=\mathbf{C}\{a\}$, где a — *неизолированная* точка из X, то вместо $y=\lim\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x)$ пишут также $y=\lim\limits_{x\to a,\ x\neq a} f(x)$.

Аналогичные определения имеют место и для предельных точек.

Если f есть *сужение* на A отображения $g\colon X\to Y$, то говорят, что g имеет предел (соотв. предельную точку) y относительно A в точке $a\in\overline{A}$, если y есть предел (соотв. предельная точка) функции f в a относительно A.

Пусть $B\subset A$ и $a\in X$ — *точка прикосновения* множества B. Если y есть предел отображения $f\colon A\to Y$ в a *относительно* A, то y есть также предел отображения f в a *относительно* B. Обратное неверно; но если V — *окрестность* в X точки $a\in\overline{A}$ и f имеет предел y в a *относительно* $V\cap A$, то y есть также предел f в a *относительно* A.

Пусть a — *неизолированная* точка пространства X и, следовательно, точка прикосновения множества $\mathbf{C}\{a\}$. Для того чтобы

отображение $f\colon X \to Y$ было *непрерывно в точке* a, необходимо и достаточно, как это непосредственно следует из определений, чтобы $f(a) = \lim\limits_{x \to a,\, x \neq a} f(x)$.

6. *Пределы в произведениях пространств и факторпространствах*

Предложение 10. *Пусть* X — *множество*, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство топологических пространств*, f_ι *для каждого* $\iota \in I$ — *отображение* X *в* Y_ι. *Наделим* X *слабейшей топологией* $\mathscr{T}$, *при которой все* f_ι *непрерывны. Для того чтобы фильтр* $\mathfrak{F}$ *в* X *сходился к точке* $a \in X$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\iota \in I$ *базис фильтра* $f_\iota(\mathfrak{F})$ *сходился к* $f_\iota(a)$ *в* Y_ι.

Условие необходимо, поскольку все f_ι непрерывны (следствие 1 предложения 9). Обратно, предположим, что оно выполнено, и пусть V — открытая окрестность точки a в X. По определению топологии $\mathscr{T}$ (предложение 4 § 2) существуют конечное $J \subset I$ и для каждого $\iota \in J$ такое открытое множество U_ι в Y_ι, что $f_\iota(a) \in U_\iota$ для всех $\iota \in J$ и $\bigcap\limits_{\iota \in J} f_\iota^{-1}(U_\iota) \subset V$. Но из условия вытекает, что $f_\iota^{-1}(U_\iota) \in \mathfrak{F}$ (предложение 7), а так как J конечно, то $M = \bigcap\limits_{\iota \in J} f_\iota^{-1}(U_\iota)$ принадлежит $\mathfrak{F}$, что завершает доказательство, поскольку $M \subset V$.

Следствие 1. *Для того чтобы фильтр* $\mathfrak{F}$ *в пространстве* $X = \prod\limits_{\iota \in I} X_\iota$ *сходился к точке* x, *необходимо и достаточно, чтобы базис фильтра* $\mathrm{pr}_\iota(\mathfrak{F})$ *сходился к* $\mathrm{pr}_\iota x$ *для каждого* $\iota \in I$.

Следствие 2. *Пусть* $f = (f_\iota)$ — *отображение множества* X *в пространство* $Y = \prod\limits_{\iota \in I} Y_\iota$. *Для того чтобы* f *имело предел* $y = (y_\iota)$ *по фильтру* $\mathfrak{F}$ *в* X, *необходимо и достаточно, чтобы* y_ι *было пределом* f_ι *по* $\mathfrak{F}$ *для каждого* $\iota \in I$.

Предложение 11. *Пусть* R — открытое *отношение эквивалентности в топологическом пространстве* X *и* φ — *каноническое отображение* $X \to X/R$. *Для каждой точки* $x \in X$ *и каждого базиса*

фильтра $\mathfrak{B}'$ *в* X/R, *сходящегося к* $\varphi(x)$, *существует базис фильтра* $\mathfrak{B}$ *в* X, *сходящийся к* x *и такой, что* $\varphi(\mathfrak{B})$ *эквивалентно* $\mathfrak{B}'$.

В самом деле, образ $\varphi(U)$ каждой окрестности U точки x в X является окрестностью точки $\varphi(x)$ в X/R (предложение 5 § 5); поэтому $\varphi(U)$ содержит некоторое множество $M' \in \mathfrak{B}'$; положив $M = U \cap \overset{-1}{\varphi}(M')$, будем иметь $M' = \varphi(M)$. Это показывает, что множества $U \cap \overset{-1}{\varphi}(M')$, где M' пробегает $\mathfrak{B}'$, а U — фильтр окрестностей точки x, образуют базис фильтра $\mathfrak{B}$ в X, который, очевидно, сходится к x и обладает тем свойством, что $\varphi(\mathfrak{B})$ эквивалентно $\mathfrak{B}'$.

Упражнения

1) Пусть $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ — топологии в одном и том же множестве X; для того чтобы $\mathscr{T}_1$ мажорировала $\mathscr{T}_2$, необходимо и достаточно, чтобы всякий фильтр в X, сходящийся в топологии $\mathscr{T}_1$, сходился к той же точке и в топологии $\mathscr{T}_2$.

2) Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в $\mathbf{N}$, мажорирующий фильтр Фреше, и $X = \mathbf{N} \cup \{\omega\}$ пространство, ассоциированное с $\mathfrak{U}$ (§ 6, n° 5). Показать, что в X последовательность (x_n) с бесконечным числом различных членов никогда не сходится.

3) Пусть X и X' — топологические пространства и f: $X \to X'$ — отображение, непрерывное в точке $x_0 \in X$. Показать, что если x_0 есть точка прикосновения базиса фильтра $\mathfrak{B}$ в X, то $f(x_0)$ будет точкой прикосновения базиса фильтра $f(\mathfrak{B})$ в X'.

4) а) Пусть X и Y — топологические пространства, $\mathfrak{F}$ — фильтр в X, имеющий точку прикосновения a, и $\mathfrak{G}$ — фильтр в Y, имеющий точку прикосновения b. Показать, что (a, b) есть точка прикосновения фильтра $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$.

б) Указать в пространстве $\mathbf{Q}^2$ пример последовательности (x_n, y_n), не имеющей предельных точек, в то время как каждая из последовательностей (x_n), (y_n) имеет предельную точку в $\mathbf{Q}$.

5) Пусть X и Y — топологические пространства и G — график в $X \times Y$ отображения f: $X \to Y$. Показать, что для каждого $x \in X$ множество всех предельных точек отображения f в x есть срез $\overline{G}(x)$, где $\overline{G}$ — замыкание G в пространстве $X \times Y$.

6) Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *несчетное* семейство дискретных пространств, имеющих каждое по меньшей мере две точки. Рассмотрим в произведении $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ топологию, порождаемую произведениями $\prod_{\iota \in I} M_\iota$, где $M_\iota \subset X_\iota$ для каждого $\iota \in I$ и $M_\iota = X_\iota$ для всех ι, кроме не более чем *счетного* их семейства (см. § 4, упражнение 9). Показать, что в X

пересечение всякого счетного семейства открытых множеств открыто; вывести отсюда, что ни одна точка из X не обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.

7) Назовем *примитивным* множеством в топологическом пространстве X всякое множество $A \subset X$, являющееся множеством всех пределов какого-либо ультрафильтра в X. Обозначим тогда через Υ_A множество всех ультрафильтров, имеющих A множеством всех своих пределов.

а) Показать, что если A — примитивное множество в X, то всякое пересекающееся с A открытое множество принадлежит всем ультрафильтрам $\mathfrak{U} \in \Upsilon_A$.

б) Пусть A и B — два различных примитивных множества в X. Показать, что существуют такие ультрафильтр $\mathfrak{U} \in \Upsilon_A$, ультрафильтр $\mathfrak{V} \in \Upsilon_B$ и множество $M \subset X$, что $M \in \mathfrak{U}$, а $\complement M \in \mathfrak{V}$.

в) Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Показать, что образ при f всякого примитивного множества пространства X содержится в некотором примитивном множестве пространства Y.

г) Если точка $x \in X$ такова, что $\{x\}$ замкнуто в X, то множество $\{x\}$ примитивно в X.

§ 8. Отделимые и регулярные пространства

1. Отделимые пространства

Предложение 1. *Пусть X — топологическое пространство. Следующие утверждения равносильны:*

(Н) *Каковы бы ни были различные точки x и y в X, существуют окрестность точки x и окрестность точки y, не имеющие общих точек.*

(Н^{I}) *Пересечение всех замкнутых окрестностей произвольной точки из X есть множество, сводящееся к одной этой точке.*

(Н^{II}) *Диагональ Δ пространства $X \times X$ есть замкнутое множество.*

(Н^{III}) *Для любого множества I диагональ Δ пространства $Y = X^I$ замкнута в Y.*

(Н^{IV}) *Ни один фильтр в X не может иметь более одного предела.*

(Н^{V}) *Если фильтр $\mathfrak{F}$ в X имеет предел x, то x — его единственная точка прикосновения.*

Докажем импликации

$$\text{Н} \Rightarrow \text{Н}^{\text{I}} \Rightarrow \text{Н}^{\text{V}} \Rightarrow \text{Н}^{\text{IV}} \Rightarrow \text{Н} \quad \text{и} \quad \text{Н} \Rightarrow \text{Н}^{\text{III}} \Rightarrow \text{Н}^{\text{II}} \Rightarrow \text{Н}.$$

(H)$\Rightarrow$(H$^{\text{I}}$): В самом деле, если $x \neq y$, то существуют открытая окрестность U точки x и открытая окрестность V точки y такие, что $U \cap V = \varnothing$; следовательно, $y \notin \overline{U}$.

(H$^{\text{I}}$)$\Rightarrow$(H$^{\text{V}}$): Пусть $y \neq x$; имеется замкнутая окрестность V точки x такая, что $y \notin V$, и по предположению существует такое $M \in \mathfrak{F}$, что $M \subset V$; отсюда следует, что $M \cap \complement V = \varnothing$, а так как $\complement V$ — окрестность точки y, то y не является точкой прикосновения для $\mathfrak{F}$.

(H$^{\text{V}}$)$\Rightarrow$(H$^{\text{IV}}$): Это очевидно, поскольку всякий предел фильтра является точкой прикосновения этого фильтра.

(H$^{\text{IV}}$)$\Rightarrow$(H): Если всякая окрестность V точки x пересекается со всякой окрестностью W точки y, то множества $V \cap W$ образуют базис фильтра, имеющий своим пределом в X как x, так и y. Отсюда и вытекает утверждаемая импликация.

(H)$\Rightarrow$(H$^{\text{III}}$): Пусть $x = (x_\iota)$ — точка из X^I, не принадлежащая Δ, так что имеются по крайней мере два индекса λ, μ, для которых $x_\lambda \neq x_\mu$. Пусть V_λ и V_μ — окрестности точек x_λ и x_μ в X такие, что $V_\lambda \cap V_\mu = \varnothing$; тогда множество $W = V_\lambda \times V_\mu \times \prod_{\iota \neq \lambda, \mu} X_\iota$ (где $X_\iota = X$ для $\iota \neq \lambda, \mu$) есть окрестность точки x в X^I (§ 4, n° 1), не пересекающаяся с Δ, что и доказывает замкнутость Δ в X^I.

(H$^{\text{III}}$)$\Rightarrow$(H$^{\text{II}}$): Очевидно.

(H$^{\text{II}}$)$\Rightarrow$(H): Если $x \neq y$, то точка $(x, y) \in X \times X$ не принадлежит диагонали Δ, так что (§ 4, n° 1) существуют окрестность V точки x и окрестность W точки y такие, что $(V \times W) \cap \Delta = \varnothing$, а это означает, что $V \cap W = \varnothing$.

Определение 1. *Топологическое пространство X, удовлетворяющее условиям предложения* 1, *называется отделимым* (или *хаусдорфовым*) *пространством*; *его топология называется отделимой* (или *хаусдорфовой*).

Аксиома (H) называется *аксиомой Хаусдорфа*.

Примеры. Всякое дискретное пространство отделимо. Рациональная прямая Q отделима, ибо если x и y — рациональные числа такие, что $x < y$, то для всякого рационального числа z, удовлетворяющего условиям $x < z < y$, окрестности $]\leftarrow, z[$ и $]z, \rightarrow[$ точек x и y не пересекаются.

Пространство, имеющее не меньше двух точек и наделенное слабейшей топологией (§ 2, n° 2), неотделимо.

Пусть f: $X \to Y$ — отображение множества X в *отделимое* пространство Y. Из предложения 1 сразу следует, что f может иметь только *один предел* по фильтру $\mathfrak{F}$ в X и что если f имеет предел y по $\mathfrak{F}$, то y есть *единственная предельная точка* f по $\mathfrak{F}$.

Предложение 2. *Пусть f и g — непрерывные отображения топологического пространства X в* отделимое *пространство Y; тогда множество тех $x \in X$, для которых $f(x)=g(x)$, замкнуто в X.*

В самом деле, это множество есть прообраз диагонали произведения $Y \times Y$ относительно непрерывного (по предложению 1 § 4) отображения $x \mapsto (f(x), g(x))$ пространства X в $Y \times Y$; следовательно, справедливость предложения следует из (H$^{\text{II}}$) и теоремы 1 § 2.

Следствие 1 (Принцип продолжения тождеств). *Пусть f и g — непрерывные отображения топологического пространства X в отделимое пространство Y. Если $f(x)=g(x)$ во всех точках некоторого всюду плотного в X множества, то $f=g$.*

Другими словами, непрерывное отображение пространства X в (отделимое) пространство Y полностью определяется своими значениями в точках какого-либо всюду плотного в X множества.

Следствие 2. *График непрерывного отображения f топологического пространства X в отделимое пространство Y замкнут в $X \times Y$.*

В самом деле, этот график есть множество тех точек $(x, y) \in X \times Y$, у которых $f(x)=y$, а отображения $(x, y) \mapsto y$ и $(x, y) \mapsto f(x)$ пространства $X \times Y$ в Y непрерывны.

Предложение 3. *Пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство попарно различных точек отделимого пространства X; тогда для каждого индекса i существует такая окрестность V_i точки x_i в X, что множества V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ попарно не пересекаются.*

Проведем доказательство индукцией по n. При $n=2$ утверждаемое предложение есть не что иное, как аксиома (H). Пусть теперь W_i — попарно не пересекающиеся окрестности точек x_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ существуют окрестность T_i точки x_i и окрестность U_i точки x_n, имеющие пустое пере-

сечение. Положив тогда $V_i = W_i \cap T_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $V_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} U_i$, получим нужные окрестности.

Следствие. *Всякое отделимое конечное пространство дискретно.*

Предложение 4. *В отделимом пространстве всякое конечное множество замкнуто.*

Для доказательства достаточно заметить, что всякое одноточечное множество замкнуто в силу аксиомы (H^1).

Предложение 5. *Если для любой пары различных точек x, y топологического пространства X существует такое его непрерывное отображение f в отделимое пространство X', что $f(x) \neq f(y)$, то X отделимо.*

В самом деле, пусть V' и W' — непересекающиеся окрестности точек $f(x)$ и $f(y)$ в X'; тогда $\overset{-1}{f}(V')$ и $\overset{-1}{f}(W')$ будут непересекающимися окрестностями точек x и y, чем предложение и доказано.

Следствие. *Всякая топология, мажорирующая отделимую топологию, отделима.*

2. *Подпространства и произведения отделимых пространств*

Всякое подпространство A отделимого пространства X отделимо: в самом деле, достаточно применить предложение 5 к канонической инъекции $A \to X$.

Обратно:

Предложение 6. *Если всякая точка топологического пространства X имеет* замкнутую *окрестность, являющуюся отделимым подпространством пространства X, то X отделимо.*

В самом деле, пусть x — точка из X и V — ее замкнутая окрестность в X, являющаяся отделимым подпространством. По предположению (аксиома (H^1)), пересечением всевозможных замкнутых окрестностей точки x относительно V является множество

$\{x\}$; так как они являются также замкнутыми окрестностями точки x в X (§ 3, n° 1), то пересечение всех замкнутых окрестностей x в X тем более сводится к x; следовательно, X удовлетворяет аксиоме (H^1).

Можно привести примеры *неотделимых* пространств, в которых каждая точка обладает *отделимой* окрестностью (упражнение 7).

Предложение 7. *Произведение любого семейства отделимых пространств отделимо. Обратно, если произведение семейства непустых пространств отделимо, то каждое пространство-сомножитель отделимо.*

В самом деле, пусть $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$ — произведение топологических пространств; если x и y — две различные точки из X, то существует такое ι, что $\mathrm{pr}_\iota x \neq \mathrm{pr}_\iota y$, и предложение 5 показывает, что отделимость всех X_ι влечет отделимость X. Обратно, если X отделимо, а X_ι не пусты, то каждое X_ι гомеоморфно подпространству пространства X (предложение 4 § 4) и, следовательно, отделимо.

Следствие 1. *Пусть X — множество, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство отделимых топологических пространств и f_ι для каждого $\iota\in I$ — отображение X в Y_ι. Наделим X слабейшей топологией $\mathscr{T}$, при которой все f_ι непрерывны. Для того чтобы X было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары различных точек x, y из X существовало такое $\iota\in I$, что $f_\iota(x)\neq f_\iota(y)$.*

В силу предложения 5 условие достаточно. Обратно, для доказательства необходимости можно в силу доказанного только что предложения 7 и предложения 3 § 4 ограничиться случаем, когда I сводится к одному элементу, другими словами, случаем, когда $\mathscr{T}$ есть прообраз относительно f: $X\to Y$ некоторой отделимой топологии. Но если $f(x)=f(y)$ для двух различных точек x, y из X, то ясно, что всякое открытое множество (в топологии $\mathscr{T}$), содержащее x, содержит также y, откуда и следует наше утверждение.

Следствие 2. *Пусть $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических пространств. Если все X_α отделимы, то $X=\varprojlim X_\alpha$ отделимо и является замкнутым подпространством пространства $\prod_\alpha X_\alpha$.*

Первое утверждение сразу следует из того, что X есть подпространство отделимого (по предложению 7) пространства $\prod_\alpha X_\alpha$. С другой стороны, пусть $F_{\alpha\beta}$ при $\alpha \leqslant \beta$ означает подмножество произведения $\prod_\alpha X_\alpha$, состоящее из тех x, для которых $\mathrm{pr}_\alpha x = f_{\alpha\beta}(\mathrm{pr}_\beta x)$; все $F_{\alpha\beta}$ замкнуты в $\prod_\alpha X_\alpha$ (предложение 2), значит, и их пересечение X замкнуто.

Непосредственно ясно, что всякая *сумма* отделимых пространств (§ 2, n° 4, пример III) отделима.

3. *Отделимость факторпространства*

Исследуем, при каких условиях факторпространство X/R *отделимо* (в этом случае и отношение эквивалентности R называется *отделимым*). Прежде всего, если X/R отделимо, то одноточечные множества в X/R *замкнуты* (предложение 4) и, следовательно, *всякий класс эквивалентности по* R *замкнут в* X. Это необходимое условие еще не достаточно; определение открытых множеств в X/R доставляет следующее необходимое и достаточное условие: *для того чтобы* X/R *было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы любые два различных класса эквивалентности в* X *содержались в двух непересекающихся насыщенных открытых множествах.* Установим теперь другие, более удобные условия.

Предложение 8. *Для того чтобы факторпространство* X/R *было отделимым, необходимо, чтобы график* C *отношения* R *был замкнут в* $X \times X$. *Если отношение* R *открыто, то это условие также достаточно.*

Пусть φ: $X \to X/R$ — каноническое отображение; C есть прообраз диагонали Δ произведения $(X/R) \times (X/R)$ относительно отображения $\varphi \times \varphi$: $X \times X \to (X/R) \times (X/R)$; следовательно, первое утверждение вытекает из непрерывности $\varphi \times \varphi$, аксиомы $(\mathrm{H}^{\mathrm{II}})$ и теоремы 1 § 2. Если R открыто, то $(X/R) \times (X/R)$ отождествимо с факторпространством $(X \times X)/(R \times R)$ (§ 5, следствие предложения 8) и, значит, Δ отождествимо с каноническим образом в $(X \times X)/(R \times R)$ множества C, насыщенного по $R \times R$, откуда следует второе утверждение.

При R не открытом можно привести примеры, где C замкнуто, а R не отделимо (упражнения 10 и 28).

Для доказательства отделимости X/R можно также использовать предложение 5. А именно, взяв два различных класса эквивалентности M и N по R, достаточно найти такое непрерывное отображение f открытого насыщенного по R множества $A \subset X$, содержащего M и N, в отделимое пространство X', что: 1° f постоянно на каждом классе эквивалентности по R, содержащемся в A; 2° значения f на M и N различны. Так как A/R_A можно отождествить с некоторым открытым множеством в X/R (§ 3, следствие 1 предложения 10), то предложение 5 применимо к отображению $g\colon A/R_A \to X'$, получаемому факторизацией f, поскольку это отображение непрерывно (§ 3, предложение 6).

В частности:

Предложение 9. *Если f — непрерывное отображение топологического пространства X в отделимое пространство X' и R — отношение эквивалентности $f(x)=f(y)$, то факторпространство X/R отделимо.*

Предложение 10. *Если X — отделимое пространство, обладающее непрерывным сечением s по отношению R, то X/R отделимо и $s(X/R)$ замкнуто в X.*

В самом деле (§ 3, n° 5), X/R гомеоморфно подпространству $s(X/R)$ отделимого пространства X и, значит, отделимо. При этом $s(X/R)$ есть множество тех $x \in X$, для которых $s(\varphi(x))=x$, где $\varphi\colon X \to X/R$ — каноническое отображение; так что второе утверждение вытекает из предложения 2.

4. Регулярные пространства

Предложение 11. *В топологическом пространстве X следующие свойства равносильны:*

(O_{III}) *Множество всех замкнутых окрестностей любой точки в X есть фундаментальная система окрестностей этой точки.*

(O'_{III}) *Для каждого замкнутого множества F в X и каждой точки $x \notin F$ существуют окрестность точки x и окрестность множества F, не имеющие общих точек.*

$(O_{III})\Rightarrow(O'_{III})$: В самом деле, из (O_{III}) следует, что если F замкнуто и $x\notin F$, то существует замкнутая окрестность V точки x, содержащаяся в окрестности $\mathbf{C}F$ точки x; тогда V и $\mathbf{C}V$ будут окрестностями соответственно точки x и множества F, не имеющими общих точек.

$(O'_{III})\Rightarrow(O_{III})$: В самом деле, пусть W — открытая окрестность точки $x\in X$; из (O'_{III}) следует, что существуют окрестность U точки x и окрестность V множества $\mathbf{C}W$, не имеющие общих точек, а тогда $\overline{U}\subset W$.

Определение 2. *Отделимое топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме* (O_{III}), *называют регулярным; тогда и его топология называется регулярной.*

Дискретное пространство регулярно. °Как мы увидим в § 9, всякое *локально компактное* пространство (в частности, числовая прямая $\mathbf{R}$) есть регулярное пространство.°

Предложение 12. *Всякое подпространство регулярного пространства регулярно.*

В самом деле, пусть A — подпространство регулярного пространства X. Поскольку X отделимо, A тоже отделимо (n° 2); с другой стороны, всякая окрестность точки $x\in A$ относительно A имеет вид $V\cap A$, где V — окрестность точки x в X. Так как X регулярно, то в нем существует окрестность W точки x, замкнутая в X и содержащаяся в V; тогда $W\cap A$ есть окрестность точки x в A, замкнутая в A и такая, что $W\cap A\subset V\cap A$, чем предложение доказано.

Обратно:

Предложение 13. *Если всякая точка топологического пространства X обладает* замкнутой *окрестностью, являющейся регулярным подпространством пространства X, то X регулярно*

В самом деле, X отделимо (предложение 6). С другой стороны, пусть x — произвольная точка из X и V — ее замкнутая окрестность, являющаяся регулярным подпространством пространства X. Любая окрестность U точки x в X, содержащаяся в V, будет окрестностью точки x в V; значит, в силу предположения сущест-

вует окрестность W точки x в V, замкнутая в V и содержащаяся в U. Но W есть также окрестность точки x в X, ибо V — окрестность x в X, и при этом W замкнута в X, ибо V замкнута в X.

Замечания. 1) Существуют примеры *неотделимых* пространств, каждая точка которых обладает *регулярной* окрестностью (упражнение 7).

2) Существуют примеры *нерегулярных отделимых* пространств (упражнение 20).

3) Топология, *мажорирующая* регулярную топологию, не обязательно регулярна (упражнение 20).

5. *Продолжение по непрерывности. Двойной предел*

Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство, A — всюду плотное множество в X и $f\colon A\to Y$ — отображение множества A в* регулярное *пространство Y. Для того чтобы существовало непрерывное отображение $\overline{f}\colon X\to Y$, продолжающее f, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $x\in X$, $f(y)$ стремилось к некоторому пределу в Y, когда y стремится к x, оставаясь в A. Непрерывное продолжение $\overline{f}$ отображения f на X тогда единственно.*

Единственность $\overline{f}$ вытекает из принципа продолжения тождеств (следствие 1 предложения 2). Необходимость условия очевидна, ибо если $\overline{f}$ непрерывно на X, то для любого $x\in X$ имеем $\overline{f}(x)=\lim\limits_{y\to x,\,y\in A}\overline{f}(y)=\lim\limits_{y\to x,\,y\in A}f(y)$ (§ 7, n° 5). Обратно, если условие теоремы выполнено, то для любого $x\in X$ *положим* $\overline{f}(x)$ равным $\lim\limits_{y\to x,\,y\in A}f(y)$ — вполне определенному элементу пространства Y, поскольку Y отделимо. Остается доказать *непрерывность* $\overline{f}$ в каждой точке $x\in X$. Пусть V' — *замкнутая* окрестность точки $\overline{f}(x)$ в Y; по предположению, существует такая *открытая* окрестность V точки x в X, что $f(V\cap A)\subset V'$; так как V есть окрестность каждой своей точки, то для любого $z\in V$ имеем $\overline{f}(z)=\lim\limits_{y\to z,\,y\in V\cap A}f(y)$, откуда $\overline{f}(z)\in\overline{f(V\cap A)}\subset V'$, поскольку V' замкнуто. Справедливость утверждения вытекает, таким образом, из того, что замкнутые окрестности точки $f(x)$ образуют фундаментальную систему ее окрестностей в Y.

Говорят, что отображение $\overline{f}$ получено *продолжением f на X по непрерывности.*

В теореме 1 регулярность Y нельзя заменить менее ограничительным условием без дополнительных предположений относительно X, A или f (упражнение 19).

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ — фильтр в множестве $X = X_1 \times X_2$, являющийся произведением* (§ 6, n° 7) *фильтра $\mathfrak{F}_1$, заданного в множестве X_1, и фильтра $\mathfrak{F}_2$, заданного в множестве X_2. Пусть, далее, f — отображение множества X в* регулярное *пространство Y. Предположим, что:*

а) $\lim_{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2} f$ *существует;*

б) $\lim\limits_{x_2, \mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2) = g(x_1)$ *существует при любом* $x_1 \in X_1$.

Тогда $\lim\limits_{x_1, \mathfrak{F}_1} g(x_1)$ *существует и равен* $\lim_{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2} f$.

Пусть $X_1' = X_1 \cup \{\omega_1\}$ (соотв. $X_2' = X_2 \cup \{\omega_2\}$) — топологическое пространство, *ассоциированное* с фильтром $\mathfrak{F}_1$ (соотв. $\mathfrak{F}_2$) (§ 6, n° 5, пример), и X'' — объединение подпространств $X_1 \times X_2'$ и $\{(\omega_1, \omega_2)\}$ пространства $X' = X_1' \times X_2'$; очевидно, X — всюду плотное подпространство в X'', и сделанные предположения означают, что $f(y_1, y_2)$ стремится к некоторому пределу, когда (y_1, y_2) стремится к какой-либо точке (x_1, x_2) из X'', оставаясь в X. Поэтому существование продолжения функции f по непрерывности на X'' вытекает из теоремы 1. Так как при этом (ω_1, ω_2) есть точка прикосновения множества $X_1 \times \{\omega_2\}$ в X'', то справедливость утверждения сразу следует отсюда (§ 7, n° 5).

6. *Отношения эквивалентности в регулярном пространстве*

Предложение 14. *Пусть R — замкнутое отношение эквивалентности в регулярном пространстве X; тогда график C отношения R замкнут в $X \times X$.*

Пусть (a, b) — точка прикосновения множества C в $X \times X$ и V (соотв. W) — *замкнутая* окрестность точки a (соотв. окрестность точки b) в X; по предположению существует $(x, y) \in C \cap (V \times W)$. Поскольку $x \in V$, точка y принадлежит насыщению S окрестности V по R; значит, $W \cap S \neq \varnothing$ для любой окрестности

W точки b, и так как S в силу предположения *замкнуто*, то $b \in S$. Пусть B — насыщение множества $\{b\}$ по R; тогда $V \cap B \neq \varnothing$ для любой замкнутой окрестности V точки a; так как по предположению B *замкнуто*, а X *регулярно*, то $a \in B$ и, значит, $(a, b) \in C$, что и завершает доказательство.

Следствие. *В регулярном пространстве всякое одновременно открытое и замкнутое отношение эквивалентности отделимо.*

Это следует из предложений 14 и 8.

Предложение 15. *Пусть X — регулярное пространство, F — непустое замкнутое множество в X и R — отношение эквивалентности, получаемое отождествлением друг с другом всех точек из F* (иными словами, отношение эквивалентности, классами которого служат F и множества $\{x\}$ для всех $x \in \complement F$). *Тогда факторпространство X/R отделимо.*

В самом деле, пусть M и N — два различных класса эквивалентности в X. Если каждый из них сводится к одной точке из $\complement F$, то в отделимом пространстве $\complement F$ существуют непересекающиеся открытые окрестности множеств M и N, и они являются насыщенными по R непересекающимися окрестностями множеств M и N в X. Если $M = F$, а $N = \{b\}$, где $b \notin F$, то по предположению существуют открытая окрестность точки b и не пересекающаяся с ней открытая окрестность множества F, причем эти окрестности насыщены по R, что и завершает доказательство.

Отметим, что факторпространство X/R не обязательно регулярно (гл. IX, 2-е изд., § 4, упражнение 14).

Упражнения

1) а) Пусть X — топологическое пространство; доказать равносильность следующих свойств:

(Q) Каковы бы ни были две различные точки x и y из X, существует окрестность точки x, не содержащая y.

(Q′) Всякое одноточечное множество в X замкнуто.

(Q″) Пересечение всех окрестностей любой точки $x \in X$ сводится к x.

Пространство X, обладающее этими свойствами, называется *достижимым*.

б) Для того чтобы упорядоченное множество X, наделенное правой топологией (в которой X есть колмогоровское пространство (§ 1, упражнение 2)), было достижимым, необходимо и достаточно, чтобы никакие два различных элемента из X не были сравнимыми, и тогда правая топология в X дискретна.

2) а) Если топология в множестве X порождена конечным множеством его подмножеств и X в этой топологии достижимо, то X конечно и рассматриваемая топология дискретна.

б) Если в достижимом пространстве X *всякое* пересечение открытых множеств открыто, то X дискретно [см. § 7, упражнение 6].

3) а) Пусть x — точка прикосновения множества A в достижимом пространстве X, не принадлежащая A; показать, что всякая окрестность точки x содержит бесконечное множество точек из A.

б) Пусть X — достижимое пространство и $A \subset X$. Показать, что множество точек $x \in \overline{A}$ таких, что любая окрестность x содержит отличную от x точку из A, замкнуто в X.

в) Показать, что в достижимом пространстве X пересечение всех окрестностей любого множества $A \subset X$ совпадает с A.

4) Всякое подпространство колмогоровского (соотв. достижимого) пространства есть колмогоровское (соотв. достижимое) пространство. Топология, мажорирующая топологию колмогоровского (соотв. достижимого) пространства, есть топология колмогоровского (соотв. достижимого) пространства.

*5) а) Пусть X — бесконечное множество. Показать, что все топологии $\mathscr{T}_\mathfrak{c}$ в X (§ 2, упражнение 8) такие, что $1 < \mathfrak{c} \leqslant \mathrm{Card}\,(X)$, суть топологии достижимого, но неотделимого пространства.

б) Показать, что пересечение всех отделимых топологий в X есть неотделимая топология $\mathscr{T}_{\mathrm{Card}\,(\mathbf{N})}$, являющаяся также слабейшей достижимой топологией в X. [Использовать упражнение 8 § 2 и заметить, что в X имеются отделимые топологии, у которых существуют незамкнутые счетно-бесконечные множества.]

6) а) Пусть X — отделимое пространство и D — всюду плотное множество в X. Показать, что $\mathrm{Card}\,(X) \leqslant 2^{2^{\mathrm{Card}(D)}}$. [Заметить, что всякая точка из X есть предел некоторого базиса фильтра из D.] Показать, что эта оценка для $\mathrm{Card}(X)$ не может быть улучшена [§ 4, упражнение 5б], и вывести отсюда, что в бесконечном множестве A множество всех ультрафильтров и множество всех фильтров равномощны с $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))$.

б) Пусть K — дискретное пространство, образованное числами 0 и 1, и A — бесконечное множество. Вывести из а), что если $\mathrm{Card}(A) \geqslant 2^{2^{\mathrm{Card}\,(\mathbf{N})}}$, то пространство K^A удовлетворяет условию $(\mathrm{D}_{\mathrm{IV}})$, но ни условию $(\mathrm{D}_{\mathrm{II}})$, ни условию $(\mathrm{D}_{\mathrm{III}})$, упражнения 7 § 1 [§ 4, упражнение 4].

°7) Пусть X — интервал $[-1, 1]$ в $\mathbf{R}$. Рассмотрим в X следующее отношение эквивалентности S: класс эквивалентности каждой точки

$x \neq \pm 1$ состоит из точек x и $-x$; классы эквивалентности каждой из точек 1 и -1 сводятся к одной этой точке. Показать, что отношение S открыто и факторпространство X/S достижимо, но неотделимо. Кроме того, каждая точка из X/S обладает окрестностью в X/S, являющейся регулярным подпространством.$_\circ$

8) Пусть X — топологическое пространство и R — замкнутое отношение эквивалентности в X, все классы эквивалентности по которому *конечны*. Показать, что если X отделимо (соотв. регулярно), то то же верно и для X/R. Это применимо, в частности, к следующим двум случаям:

1° X/R есть факторпространство, полученное склеиванием семейства пространств (X_ι) по замкнутым множествам $A_{\iota\varkappa}$ (§ 3, п° 4), удовлетворяющим тому условию, что для каждого индекса ι существует лишь *конечное* множество индексов $\varkappa$, для которых $A_{\iota\varkappa} \neq \varnothing$.

2° R есть отношение эквивалентности «существует $\sigma \in \Gamma$ такое, что $y = \sigma(x)$», где Γ — *конечная* группа гомеоморфизмов пространства X.

°9) Показать, что пространство X/S упражнения 7 можно определить как полученное склеиванием двух регулярных пространств по паре открытых множеств.$_\circ$

°10) Рассмотрим в $\mathbf{R}$ подпространство X, дополнительное к множеству точек вида $\frac{1}{n}$, где n пробегает все целые рациональные числа, отличные от 0 и ± 1. Пусть S — отношение эквивалентности в X, классы которого суть: 1° множество, образованное точкой 0; 2° множество всех целых чисел $\neq 0$; 3° все множества вида $\left\{x, \frac{1}{x}\right\}$, где $x \in X$, $x \neq 0$ и $|x| < 1$.

а) Показать, что отношение S в X ни открыто, ни замкнуто.

б) Показать, что график отношения S замкнут в $X \times X$, но факторпространство X/S неотделимо.$_\circ$

*°11) Пусть X — топологическое пространство. Рассмотрим пространство $Z = \mathbf{R}^X$ и обозначим для каждого $x \in X$ через Z_x множество в Z, состоящее из тех $u \in \mathbf{R}^X$, у которых $u(x) \in \mathbf{Q}$ и $u(y) \notin \mathbf{Q}$ для всех $y \in X$, отличных от x. Пусть Y — подпространство произведения $X \times Z$, являющееся объединением множеств $\{x\} \times Z_x$, где x пробегает X. Показать, что пространство Y *отделимо*, а X гомеоморфно некоторому его факторпространству.$_\circ$

12) Пусть X — топологическое пространство, имеющее по крайней мере две различные точки.

а) Показать, что топологии $\mathscr{T}_\Omega$ и $\mathscr{T}_\Phi$ в $\mathfrak{P}_0(X)$ (§ 2, упражнение 7) не являются топологиями достижимого пространства.

б) Пусть $\mathscr{T}_\Theta$ — верхняя грань топологий $\mathscr{T}_\Omega$ и $\mathscr{T}_\Phi$. Показать, что множество всех непустых конечных подмножеств из X плотно в $\mathfrak{P}_0(X)$ в топологии $\mathscr{T}_\Theta$. Показать, что множество $\mathfrak{F}(X)$ всех непустых замкну-

тых подмножеств из X является колмогоровским пространством в топологии, индуцированной топологией $\mathscr{T}_\Theta$; при этом если X достижимо, то и $\mathfrak{F}(X)$ достижимо.

в) Предполагая X достижимым, показать, что для отделимости пространства $\mathfrak{F}(X)$ в топологии, индуцированной топологией $\mathscr{T}_\Theta$, необходимо и достаточно, чтобы X было регулярно.

*13) Пусть X — множество, Γ — некоторая группа его перестановок.

а) Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторое множество подмножеств множества X. Показать, что среди всевозможных топологий в X, при которых все множества из $\mathfrak{F}$ замкнуты, а все отображения $u \in \Gamma$ — гомеоморфизмы пространства X на себя, существует слабейшая топология $\mathscr{T}(\Gamma, \mathfrak{F})$. При этом если X бесконечно, то существуют такие множества $\mathfrak{F}$ подмножеств из X, что топология $\mathscr{T}(\Gamma, \mathfrak{F})$ не дискретна и достижима. [§ 2, упражнение 8.]

б) Пусть $J(\Gamma)$ — множество тех $A \subset X$, которые обладают следующим свойством: для каждого $x \notin A$ существует отображение $f \in \Gamma$, тождественное на A и такое, что $f(x) \neq x$. Показать, что всякая отделимая топология в X, для которой любое отображение $u \in \Gamma$ является гомеоморфизмом X на себя, мажорирует топологию $\mathscr{T}_J(\Gamma) = \mathscr{T}(\Gamma, J(\Gamma))$.

Для того чтобы топология $\mathscr{T}_J(\Gamma)$ была отделимой, необходимо и достаточно, чтобы группа Γ удовлетворяла следующему условию: для любых двух различных точек x и y из X существует конечное число элементов $u_k \in \Gamma$ таких, что множества $F(u_k)$ элементов из X, инвариантных относительно u_k, образуют покрытие пространства X и ни одно из них не содержит одновременно x и y.

в) Обозначим через $\mathscr{T}_0$ топологию рациональной прямой $\mathbf{Q}$ (°соотв. числовой прямой $\mathbf{R}_\circ$) и через Γ — группу всех гомеоморфизмов этой прямой $\mathbf{Q}$ (°соотв. $\mathbf{R}_\circ$) на себя. Показать, что топология $\mathscr{T}_J(\Gamma)$ совпадает с $\mathscr{T}_0$.

г) Пусть X — подпространство рациональной прямой, образованное точками 0 и $\frac{1}{n}$ (где n — целое $\geqslant 1$), и Γ — группа всех гомеоморфизмов пространства X. Показать, что топология $\mathscr{T}_J(\Gamma)$ неотделима и что группа гомеоморфизмов X, наделенного этой топологией, совпадает с Γ.

д) Пусть X — такое топологическое пространство, что для любой пары его различных точек x, y существует гомеоморфизм u пространства X на себя такой, что $u(x) = x$, $u(y) \neq y$ (°например, числовое пространство $\mathbf{R}^n_\circ$). Пусть G — группа всех гомеоморфизмов пространства X на себя и S_x для каждого $x \in X$ — ее подгруппа, оставляющая x неизменным. Показать, что S_x совпадает со своим нормализатором в G и что пересечение всех S_x сводится к одному нейтральному элементу; в частности, центр группы G сводится к одному нейтральному элементу.

14) Показать, что аксиома (O_{III}) равносильна каждой из следующих аксиом:

(O''_{III}) Пересечение всех замкнутых окрестностей произвольного замкнутого множества F в X совпадает с F.

(O'''_{III}) Для любого фильтра $\mathfrak{F}$ в X, сходящегося к точке a, фильтр $\overline{\mathfrak{F}}$ в X, имеющий в качестве базиса замыкание всех множеств из $\mathfrak{F}$, также сходится к a.

15) а) Показать, что всякое колмогоровское пространство, удовлетворяющее аксиоме (O_{III}), отделимо (и, следовательно, регулярно).

б) Образовать в множестве из трех элементов неотделимую топологию, удовлетворяющую аксиоме (O_{III}).

16) Пусть (X_ι) — бесконечное семейство топологических пространств; наделим множество $X=\prod_\iota X_\iota$ какой-либо из топологий, определенных в упражнении 9 § 4. Показать, что если все X_ι — колмогоровские (соотв. достижимые, отделимые, регулярные) пространства, то то же верно и для X.

17) Показать, что топологии $\mathscr{T}_0(X)$, $\mathscr{T}_+(X)$ и $\mathscr{T}_-(X)$ (§ 2, упражнение 5) в совершенно упорядоченном множестве X регулярны.

18) Пусть X_1 и X_2 — множества, $\mathfrak{F}_i$ — фильтр в X_i $(i=1, 2)$ и f — такое отображение произведения $X=X_1\times X_2$ в *регулярное* пространство Y, что для любого $x_1\in X_1$ существует $\lim_{x_2,\ \mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2)=g(x_1)$. Для того чтобы $a\in Y$ было точкой прикосновения функции g по фильтру $\mathfrak{F}_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности V точки a в Y и любого множества $A_1\in\mathfrak{F}_1$ существовали $x_1\in A_1$ и $A_2\in\mathfrak{F}_2$ такие, что $f(\{x_1\}\times A_2)\subset V$.

*19) Пусть X — нерегулярное отделимое пространство (см. упражнение 20) и a — точка из X, обладающая окрестностью U, не содержащей ни одной замкнутой окрестности этой точки. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр окрестностей точки a и $Y=\mathfrak{F}\cup\{\omega\}$ — топологическое пространство, ассоциированное (§ 6, n° 5) с его фильтром сечений. Рассмотрим произведение $Z=Y\times X$, наделенное следующей топологией: для $(y, x)\neq(\omega, a)$ окрестности точки (y, x) те же, что и в произведении топологий, а окрестности точки (ω, a) суть множества, содержащие каждое какое-нибудь множество вида $(\{\omega\}\times V)\cup(S\times X)$, где V — окрестность точки a в X, а S — сечение (§ 6, n° 3) фильтра $\mathfrak{F}$. Пусть A — подмножество множества Z, являющееся объединением множеств $\{V\}\times V$, где V пробегает $\mathfrak{F}$, и f — отображение $(V, x)\longmapsto x$ множества A в X. Показать, что во всякой точке из $\overline{A}$ отображение f имеет предел относительно A, но не существует непрерывного отображения множества $\overline{A}$ в X, продолжающего f.

*20) а) Открытое множество U топологического пространства X называется *регулярным*, если $U=\alpha(U)$ (§ 1, упражнение 3), иначе говоря, если U есть внутренность некоторого замкнутого множества.

Пространство X называется *полурегулярным* (а его топология $\mathscr{T}$ *полурегулярной*), если регулярные открытые множества в нем образуют базис топологии $\mathscr{T}$. Показать, что если $\mathscr{T}$ удовлетворяет аксиоме (O_{III}), то $\mathscr{T}$ полурегулярна.

б) Пересечение двух регулярных открытых множеств есть регулярное открытое множество. Вывести отсюда, что регулярные открытые множества топологии $\mathscr{T}$ образуют базис некоторой полурегулярной топологии $\mathscr{T}^*$ в X, мажорируемой топологией $\mathscr{T}$ [использовать упражнение 3г § 1]; $\mathscr{T}^*$ называется полурегулярной топологией, *ассоциированной* с $\mathscr{T}$. Каково бы ни было открытое в $\mathscr{T}$ множество $U \subset X$, его замыкание в $\mathscr{T}^*$ совпадает с замыканием в $\mathscr{T}$; если X достижимо в $\mathscr{T}$ (упражнение 1), то его изолированные точки в топологии $\mathscr{T}^*$ будут те же, что и в топологии $\mathscr{T}$. Для того чтобы топология $\mathscr{T}^*$ была отделимой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{T}$ была отделимой. Если Y — регулярное пространство, то непрерывные отображения X в Y одни и те же для топологии $\mathscr{T}$ и топологии $\mathscr{T}^*$.

в) Пусть X — полурегулярное пространство и $\mathscr{T}_0$ — его топология. Для того чтобы топология $\mathscr{T}$ в X обладала тем свойством, что $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}_0$, необходимо и достаточно, чтобы в X существовало множество $\mathfrak{M}$ *плотных* в $\mathscr{T}_0$ множеств, пересечение всякого конечного семейства которых также принадлежало бы $\mathfrak{M}$, и топология $\mathscr{T}$ порождалась объединением множества $\mathfrak{M}$ и множества всех открытых в $\mathscr{T}_0$ множеств. [Для доказательства необходимости условия рассмотреть все открытые и всюду плотные в $\mathscr{T}$ множества, обратив внимание на то, что всякое открытое в $\mathscr{T}$ множество есть пересечение некоторого открытого всюду плотного в $\mathscr{T}$ множества и множества, открытого в $\mathscr{T}_0$.] Получить отсюда примеры нерегулярных отделимых топологий, мажорирующих регулярную топологию °(и даже мажорирующих топологию метризуемого компактного пространства)$_\circ$.

21) Пусть X — отделимое пространство без изолированных точек и $\mathscr{T}_0$ — его топология. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество дополнений ко всем не более чем счетным множествам A в X, таким, что $\overline{A}$ имеет лишь конечное число изолированных точек. Показать, что если $\mathscr{T}$ — топология в X, порождаемая объединением множества $\mathfrak{M}$ и множества всех открытых в $\mathscr{T}_0$ множеств, то $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}_0$ (упражнение 20) и всякая сходящаяся в $\mathscr{T}$ последовательность содержит лишь конечное число различных членов (откуда следует, что ни одна точка не обладает в $\mathscr{T}$ счетной фундаментальной системой окрестностей, хотя само X может быть счетно и каждая его точка является тогда пересечением некоторого счетного семейства своих окрестностей).

*22) а) В обозначениях упражнения 20в показать, что множество $E(\mathscr{T}_0)$ всех топологий $\mathscr{T}$, для которых $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}_0$, индуктивно по отношению «$\mathscr{T}$ минорирует $\mathscr{T}'$». Для всякой полурегулярной топологии $\mathscr{T}_0$ в X назовем максимальные элементы множества $E(\mathscr{T}_0)$ *субмаксимальными* топологиями, а X, наделенное такой топологией,—

субмаксимальным пространством. Всякая топология из $E(\mathscr{T}_0)$ мажорируется, таким образом, субмаксимальной топологией.

б) Для того чтобы топология $\mathscr{T}$ в X была субмаксимальной, необходимо и достаточно, чтобы всякое плотное в X в топологии $\mathscr{T}$ множество было открытым в $\mathscr{T}$. Таким образом, непустое субмаксимальное пространство не является разрешимым (§ 2, упражнение 11).

в) Показать, что всякое подпространство субмаксимального пространства локально замкнуто и субмаксимально. [Рассмотреть сначала открытые подпространства и замкнутые подпространства.]

г) Показать субмаксимальность пространства, ассоциированного с фильтром, мажорирующим фильтр дополнений конечных подмножеств бесконечного множества.

д) Показать, что для всякого множества M в субмаксимальном пространстве X подпространство $\overline{M} - \mathring{M} = \mathrm{Fr}(M)$ пространства X дискретно.

е) Обратно, пусть X — топологическое пространство, в котором имеется всюду плотное открытое подпространство U такое, что U субмаксимально и топология в X U-максимальна (§ 3, упражнение 11); тогда X субмаксимально.

23) Пусть X — топологическое пространство, A — всюду плотное множество в X такое, что топология пространства X A-максимальна (§ 3, упражнение 11), и f — такое непрерывное отображение подпространства A в топологическое пространство Y, что для всякой точки из $X - A$ множество предельных точек функции f относительно A не пусто °(что имеет место, например, в случае, когда X не пусто, а Y квазикомпактно)$_\circ$. Показать, что f может быть продолжено по непрерывности на все X.

24) Пусть в интервале $]0, 1[$ рациональной прямой A означает множество всех рациональных чисел вида $k/2^n$, а B — множество всех рациональных чисел вида $k/3^n$ (где k — целое). Пусть X — пространство, получаемое наделением $]0, 1[$ топологией, порождаемой открытыми интервалами $]\alpha, \beta[$, содержащимися в X, и множествами A и B. Показать, что X есть полурегулярное (упражнение 20), но не регулярное, отделимое пространство.

*25) а) Множества всех регулярных топологий в множестве X и всех регулярных топологий без изолированных точек индуктивны по отношению «$\mathscr{T}$ минорирует $\mathscr{T}'$».

б) Топология $\mathscr{T}$ в множестве X называется *ультрарегулярной*, если она максимальна в множестве всех регулярных топологий в X без изолированных точек; таким образом, для всякой регулярной топологии в X без изолированных точек существует мажорирующая ее ультрарегулярная топология. Пространство, топология которого ультрарегулярна, называется *ультрарегулярным*. Для того чтобы регулярная топология без изолированных точек была ультрарегулярной, необходимо и достаточно, чтобы любые два взаимно дополни-

тельных в X множества A и B без изолированных точек были открытыми в $\mathscr{T}$. В частности, ультрарегулярное пространство не разрешимо (§ 2, упражнение 11). [Для доказательства достаточности условия заметить, что если $\mathscr{T}'$ — регулярная топология без изолированных точек, мажорирующая $\mathscr{T}$, U — непустое открытое в $\mathscr{T}'$ множество и $\overline{U}$ — его замыкание в $\mathscr{T}'$, то $\overline{U}$ и $X - \overline{U}$ не имеют изолированных точек в $\mathscr{T}$.]

в) В ультрарегулярном пространстве замыкание всякого множества без изолированных точек есть открытое множество, а внутренность всюду плотного множества всюду плотна; таким образом, пересечение двух всюду плотных множеств всюду плотно. Вывести отсюда, что если $\mathscr{T}_0$ — ультрарегулярная топология, то среди всех топологий $\mathscr{T}$, для которых $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}_0$ (упражнение 20), имеется мажорирующая все остальные (и необходимо субмаксимальная).

°26) Пусть (θ_n) — всюду плотная последовательность иррациональных чисел в интервале $I = [0, 1]$ числовой прямой $\mathbf{R}$, I_n — факторпространство пространства I, получаемое отождествлением друг с другом точек 0, θ_1, ..., θ_n, и φ_n — каноническое отображение $I \to I_n$. Пусть, далее, X — множество всех рациональных чисел, содержащихся в I; сужение φ_n на X является биекцией X на $\varphi_n(X)$; пусть $\mathscr{T}_n$ — прообраз относительно этой биекции топологии, индуцированной в $\varphi_n(X)$ топологией пространства I_n. Показать, что нижняя грань убывающей последовательности $(\mathscr{T}_n)$ отделимых топологий в X есть неотделимая топология.

*27) Пусть X — топологическое пространство. Показать, что существуют колмогоровское (соотв. достижимое, отделимое, регулярное) пространство Y и непрерывное отображение $\varphi: X \to Y$, обладающие следующим *универсальным* свойством: для любого непрерывного отображения $f: X \to Z$ пространства X в произвольное колмогоровское (соотв. достижимое, отделимое, регулярное) пространство Z существует, и притом единственное, непрерывное отображение $g: Y \to Z$ такое, что $f = g \circ \varphi$ (Теор. множ., гл. IV, § 3, n° 1). Проверить последовательно, что:

а) Для колмогоровских пространств можно принять за Y факторпространство пространства X по отношению эквивалентности $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

б) Для достижимых пространств можно принять за Y факторпространство пространства X по следующему отношению эквивалентности R: график отношения R есть пересечение графиков G таких эквивалентностей в X, что $G(x)$ замкнуто в X для каждого $x \in X$; G содержит тогда график отношения $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} \neq \varnothing$ между x и y.

в) Показать, используя особенно упражнение 6а, что для отделимых пространств и регулярных пространств выполнены условия $(\mathrm{CU_I})$ — $(\mathrm{CU_{III}})$ из n° 2 § 3 гл. IV Теории множеств. Привести примеры, когда X не регулярно, а отображение $\varphi: X \to Y$ в соответствующее

универсальное регулярное пространство биективно. [См. упражнение 20б.]

г) Показать, что если пространство X удовлетворяет аксиоме (O_{III}), то соответствующее ему универсальное колмогоровское пространство канонически гомеоморфно универсальному регулярному пространству, соответствующему X.

28) Пусть X — нерегулярное отделимое пространство, F — замкнутое множество в X и $a \notin F$ — точка из X, обладающая тем свойством, что любая ее окрестность пересекается со всякой окрестностью множества F. Пусть R — отношение эквивалентности, полученное отождествлением друг с другом всех точек из F. Показать, что R замкнуто и его график замкнут в $X \times X$, но X/R неотделимо.

*29) а) Пусть R — отделимое отношение эквивалентности в топологическом пространстве X, $\mathfrak{F}(X)$ — пространство всевозможных непустых замкнутых множеств в X, наделенное топологией, индуцированной топологией $\mathscr{T}_\Theta$ (упражнение 12). Показать, что всякое $A \in \mathfrak{F}(X)$, являющееся точкой прикосновения для X/R, содержится в некотором классе эквивалентности по R. [Рассуждать от противного.]

б) Предположим, кроме того, что X регулярно и отношение R открыто. Показать, что тогда X/R замкнуто в $\mathfrak{F}(X)$, наделенном топологией $\mathscr{T}_\Theta$. [Использовать предложение 11 § 7.]

§ 9. Компактные и локально компактные пространства

1. *Квазикомпактные и компактные пространства*

Определение 1. *Топологическое пространство X называется квазикомпактным, если оно удовлетворяет следующей аксиоме:*

(C) *Всякий фильтр в X имеет по крайней мере одну точку прикосновения.*

Топологическое пространство называется компактным, если оно квазикомпактно и отделимо.

Из этой аксиомы непосредственно вытекает, что если f есть отображение множества Z в квазикомпактное пространство X и $\mathfrak{F}$ — произвольный фильтр в Z, то f имеет по крайней мере одну предельную точку по $\mathfrak{F}$. В частности, всякая *последовательность* точек компактного пространства имеет по крайней мере одну предельную точку; но это условие не равносильно (C) (упражнение 12).

Мы сформулируем три аксиомы, *равносильные аксиоме* (C):

(C′) *Всякий ультрафильтр в X сходится.*

(C′) влечет (C), ибо если $\mathfrak{F}$—фильтр в X, то существует мажорирующий его ультрафильтр (§ 6, теорема 1), и так как этот ультрафильтр сходится к некоторой точке x, то x есть точка прикосновения для $\mathfrak{F}$.

(C) влечет (C′), ибо если ультрафильтр имеет точку прикосновения, то он сходится к этой точке (§ 7, следствие предложения 4).

Таким образом, если f — отображение множества Z в квазикомпактное пространство X и $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в Z, то f имеет *по крайней мере один предел* по $\mathfrak{U}$ (§ 6, предложение 10).

(C″) *Всякое семейство замкнутых множеств в* X, *пересечение которого пусто, содержит конечное подсемейство с пустым пересечением.*

(C) влечет (C″); в самом деле, пусть $\mathfrak{G}$ — семейство замкнутых множеств в X, пересечение которого пусто; если бы пересечение каждого конечного подсемейства из $\mathfrak{G}$ было не пусто, то $\mathfrak{G}$ порождало бы фильтр (§ 6, предложение 1), который согласно (C) имел бы точку прикосновения; но эта точка принадлежала бы всем множествам из $\mathfrak{G}$ в силу их замкнутости, а это противоречит предположению.

Обратно, отрицание (C) влечет отрицание (C″), ибо если $\mathfrak{F}$ — фильтр, не имеющий точек прикосновения, то замыкания множеств из $\mathfrak{F}$ образуют семейство замкнутых множеств, для которого не выполняется (C″).

(C‴) (аксиома Бореля — Лебега). *Всякое открытое покрытие пространства* X *содержит конечное открытое покрытие этого пространства.*

(C‴) получается из (C″) переходом к дополнениям, так что эти аксиомы эквивалентны.

Если X квазикомпактно, то всякое *локально конечное* покрытие $\mathfrak{R}$ пространства X *конечно*, ибо тогда в силу (C‴) существует покрытие пространства X, состоящее из конечного числа открытых множеств, каждое из которых пересекается лишь с конечным числом множеств из $\mathfrak{R}$.

Примеры. 1) Всякое *конечное* пространство *квазикомпактно*, и вообще всякое пространство, в котором имеется только конечное

число открытых множеств, квазикомпактно; для того чтобы конечное пространство было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было *дискретно*, поскольку отделимое конечное пространство дискретно (§ 8, следствие предложения 3). Обратно, *всякое дискретное компактное пространство конечно*, ибо в таком пространстве всякое одноточечное множество открыто, так что пространство конечно в силу (C'''').

2) Наделим множество X топологией, в которой замкнутыми множествами являются только X и его *конечные* подмножества (это множество подмножеств множества X очевидным образом удовлетворяет аксиомам (O'_I) и (O''_{II}) § 1). Так определенное топологическое пространство X *квазикомпактно*. В самом деле, покажем, что оно удовлетворяет аксиоме (C''). Если $(F_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство замкнутых множеств в X, имеющее пустое пересечение, то F_α для некоторого $\alpha\in I$ конечно; пусть a_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ — его элементы; в силу предположения для каждого индекса k существует такой индекс $\iota_k\in I$, что $a_k\notin F_{\iota_k}$; тогда пересечение всех F_{ι_k} $(1\leqslant k\leqslant n)$ и F_α будет пусто. Если X бесконечно, то оно неотделимо.

Замечание. Неотделимые квазикомпактные пространства особенно полезны в приложениях топологии к алгебраической геометрии, но совсем не встречаются в других математических теориях, где, напротив, компактные пространства играют решающую роль.

Теорема 1. *Пусть A — множество всех точек прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$ в квазикомпактном пространстве X. Тогда каждая окрестность множества A принадлежит $\mathfrak{F}$.*

В самом деле, пусть V — окрестность множества A; рассуждая от противного, предположим, что всякое множество из $\mathfrak{F}$ пересекается с $\mathbf{C}V$. Следы на $\mathbf{C}V$ множеств из $\mathfrak{F}$ образуют тогда базис фильтра $\mathfrak{G}$ в X, и так как X квазикомпактно, то $\mathfrak{G}$ имеет по крайней мере одну точку прикосновения y; эта точка не принадлежит A, ибо окрестность V множества A имеет с некоторыми множествами из $\mathfrak{G}$ пустое пересечение. Но так как $\mathfrak{G}$ *мажорирует* $\mathfrak{F}$, то y есть точка прикосновения и для $\mathfrak{F}$, что противоречит предположению.

Следствие. *Для того чтобы фильтр в компактном пространстве был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы он имел единственную точку прикосновения.*

Условие необходимо в силу предложения 1 § 8; оно достаточно в силу теоремы 1.

2. Регулярность компактного пространства

Предложение 1. *Пусть X — компактное пространство и x — точка из X. Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}$, образованный* замкнутыми *окрестностями точки x, был фундаментальной системой окрестностей этой точки, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств из $\mathfrak{B}$ состояло из одной точки x.*

Условие необходимо, поскольку X отделимо (§ 8, предложение 1). Оно достаточно, ибо означает, что x есть единственная точка прикосновения для $\mathfrak{B}$, откуда по следствию теоремы 1 вытекает, что $\mathfrak{B}$ сходится к x.

Следствие. *Всякое компактное пространство регулярно.*

В самом деле, из аксиомы (H^1) следует (§ 8, предложение 1), что базис фильтра, образованный *всеми* замкнутыми окрестностями какой-либо точки, удовлетворяет условию предложения 1.

Следствие предложения 1 уточняется следующим образом:

Предложение 2. *Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества в компактном пространстве X; тогда существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$.*

Предположим противное, т. е. что любая окрестность U множества A и любая окрестность V множества B пересекаются. Тогда множества $U \cap V$ образуют базис фильтра $\mathfrak{B}$ в X, который будет иметь точку прикосновения $x \in X$. Последняя должна принадлежать A, ибо в силу регулярности X у любой точки $y \notin A$ существует окрестность, не пересекающаяся с некоторой окрестностью множества A, и, следовательно, y не может быть точкой прикосновения для $\mathfrak{B}$. Таким же образом устанавливается, что $x \in B$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Это предложение имеет важные следствия, которые будут рассмотрены в § 4 гл. IX.

Отметим, что для неотделимого квазикомпактного пространства X примера 2 n° 1 не выполняется аксиома (O_{III}), ни тем более свойство, сформулированное в предложении 2, ибо пересечение никаких двух непустых открытых множеств в этом пространстве не пусто.

3. *Квазикомпактные, компактные и относительно компактные множества*

Определение 2. *Подмножество A топологического пространства X называется квазикомпактным* (соотв. *компактным*), *если подпространство A квазикомпактно* (соотв. *компактно*).

Как следует из аксиомы (C'''), для того чтобы подмножество A топологического пространства X было квазикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы всякое его покрытие множествами, *открытыми в X*, содержало *конечное* покрытие. В *отделимом* пространстве понятия квазикомпактного и компактного множеств совпадают, поскольку всякое его подпространство отделимо.

Примеры. 1) Всякое конечное множество в топологическом пространстве X квазикомпактно; пустое множество и всякое одноточечное множество компактны.

2) Пусть $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — бесконечная последовательность точек топологического пространства X, *сходящаяся* к некоторой точке a. Множество A, образованное точками x_n ($n\in\mathbf{N}$) и a, *квазикомпактно*. В самом деле, если (U_ι) — покрытие множества A открытыми множествами из X, то существует индекс $\varkappa$ такой, что $a\in U_\varkappa$; так как $U_\varkappa$ есть окрестность точки a, то существует только конечное число индексов n_k таких, что $x_{n_k}\notin U_\varkappa$; для каждого k обозначим через ι_k индекс, для которого $x_{n_k}\in U_{\iota_k}$; тогда $U_\varkappa$ и все U_{ι_k} образуют конечное открытое покрытие множества A.

Предложение 3. *В квазикомпактном* (соотв. *компактном*) *пространстве всякое замкнутое множество квазикомпактно* (соотв. *компактно*).

Достаточно применить аксиому (C''), заметив, что если A замкнуто в пространстве X, то всякое замкнутое множество в A замкнуто в X.

Предложение 4. *В отделимом пространстве всякое компактное множество замкнуто.*

Пусть A — компактное множество в отделимом пространстве X и x — произвольная точка из $\overline{A}$; покажем, что $x\in A$. По предположению след на A всякой окрестности точки x не пуст, и потому фильтр $\mathfrak{V}$ окрестностей этой точки в X индуцирует в A фильтр $\mathfrak{V}_A$; так как A компактно, то $\mathfrak{V}_A$ имеет точку прикосновения $y\in A$. Но фильтр $\mathfrak{V}$ мажорируется фильтром в X, порожденным $\mathfrak{V}_A$ (рас-

сматриваемым как базис фильтра в X); поэтому y является также точкой прикосновения для $\mathfrak{V}$. А тогда $y=x$, ибо $\mathfrak{V}$ имеет x своим пределом в X, а X отделимо (§ 8, предложение 1).

Следствие. *Для того чтобы подмножество A компактного пространства X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто в X.*

Предложение 5. *Объединение конечного семейства квазикомпактных подмножеств топологического пространства есть квазикомпактное множество.*

Достаточно доказать квазикомпактность объединения двух квазикомпактных множеств A и B в топологическом пространстве X. Пусть $\mathfrak{R}$ — открытое покрытие объединения $A \cup B$; оно является покрытием и множества A, и множества B и, следовательно, содержит конечное покрытие $\mathfrak{R}_1$ множества A и конечное покрытие $\mathfrak{R}_2$ множества B; объединение $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ будет тогда конечным покрытием множества $A \cup B$, содержащимся в $\mathfrak{R}$, и предложение доказано.

Определение 3. *Множество A в топологическом пространстве X называется относительно квазикомпактным* (соотв. *относительно компактным*) *в X, если A содержится в некотором квазикомпактном* (соотв. *компактном*) *множестве из X.*

Коротко говорят также, что A есть «относительно квазикомпактное» (соотв. «относительно компактное») множество, когда не может быть неясности насчет X. В *отделимом* пространстве понятия относительно квазикомпактного и относительно компактного множеств совпадают.

Предложение 6. *Для того чтобы множество A в отделимом пространстве X было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{A}$ было компактным.*

Достаточность очевидна, а необходимость вытекает из предложения 4 и его следствия 1.

Предложение 7. *Если A — относительно квазикомпактное множество в топологическом пространстве X, то всякий базис*

фильтра в A обладает по крайней мере одной точкой прикосновения в X.

В самом деле, если $A \subset K$, где K — квазикомпактное множество в X, то всякий базис фильтра в A имеет точку прикосновения в K.

Обращение этого предложения справедливо только при дополнительных предположениях относительно X (упражнение 23).

З а м е ч а н и е. В неотделимом пространстве компактное множество не обязательно замкнуто, а его замыкание не обязательно квазикомпактно (упражнение 5); пересечение двух компактных множеств не обязательно квазикомпактно (упражнение 5) и объединение двух компактных множеств не обязательно компактно (упражнение 5).

4. *Образ компактного пространства при непрерывном отображении*

Теорема 2. *Если f — непрерывное отображение квазикомпактного пространства X в топологическое пространство X', то множество $f(X)$ квазикомпактно.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{R}$ — покрытие множества $f(X)$ открытыми множествами из X'; тогда $f^{-1}(\mathfrak{R})$ есть открытое покрытие пространства X (§ 2, теорема 1) и, следовательно, существует конечное подмножество $\mathfrak{S}$ множества $\mathfrak{R}$ такое, что и $f^{-1}(\mathfrak{S})$ есть покрытие X; но тогда $\mathfrak{S}$ будет покрытием множества $f(X)$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства X в отделимое пространство X'; тогда образ любого квазикомпактного* (соотв. *относительно квазикомпактного*) *множества из X есть компактное* (соотв. *относительно компактное*) *множество в X'.*

Следствие 2. *Всякое непрерывное отображение f квазикомпактного пространства X в отделимое пространство X' замкнуто; если, кроме того, f биективно, то f есть гомеоморфизм.*

Это непосредственно вытекает из следствия 1 и предложения 4.

В частности:

Следствие 3. *Отделимая топология, мажорируемая топологией квазикомпактного пространства, совпадает с ней.*

Следствие 4. *Пусть X — топологическое пространство и R — отделимое отношение эквивалентности в X.*

а) *Если в X существует квазикомпактное множество K, пересекающееся со всяким классом эквивалентности по R, то X/R компактно и каноническое отображение факторпространства K/R_K на X/R есть гомеоморфизм.*

б) *Если, кроме того, всякий класс по R имеет с K только одну общую точку, то K есть непрерывное сечение по отношению R* (§ 3, n° 5).

В самом деле, пусть f — сужение на K канонического отображения $X \to X/R$; так как X/R отделимо, то оно компактно (следствие 1), а f — замкнутое отображение (следствие 2), и, следовательно, ассоциированная с f биекция $K/R_K \to X/R$ является гомеоморфизмом (§ 5, предложение 3). Этим утверждение а) доказано; утверждение б) непосредственно следует из него, поскольку тогда $K/R_K = K$.

5. Произведение компактных пространств

Теорема 3 (Тихонов). *Всякое произведение квазикомпактных* (соотв. *компактных*) *пространств квазикомпактно* (соотв. *компактно*). *Обратно, если произведение непустых топологических пространств квазикомпактно* (соотв. *компактно*), *то каждое из пространств-сомножителей квазикомпактно* (соотв. *компактно*).

Ввиду характеризации отделимых произведений (§ 8, предложение 7) все сводится к доказательству утверждений о квазикомпактных пространствах. Если $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ квазикомпактно и не пусто, то X_ι для любого ι квазикомпактно в силу теоремы 2, поскольку $X_\iota = \mathrm{pr}_\iota(X)$. Обратно, предположим, что все X_ι квазикомпактны и $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в X; тогда $\mathrm{pr}_\iota(\mathfrak{U})$ при любом $\iota \in I$ есть базис ультрафильтра в X_ι (§ 6, предложение 10), сходящегося в силу аксиомы (C′); следовательно, $\mathfrak{U}$ сходится (§ 7, следствие 1 предложения 10), что и завершает доказательство.

Следствие. *Для того чтобы множество в произведении топологических пространств было относительно квазикомпактно, необходимо и достаточно, чтобы каждая его проекция была*

относительно квазикомпактна в соответствующем пространстве-сомножителе.

Условие необходимо по теореме 2. Оно достаточно, ибо если A — множество в $\prod_\iota X_\iota$, обладающее тем свойством, что $\mathrm{pr}_\iota(A)$ для каждого ι содержится в квазикомпактном подмножестве K_ι пространства X_ι, то A содержится в квазикомпактном подмножестве $\prod_\iota K_\iota$ пространств $\prod_\iota X_\iota$.

6. *Проективные пределы компактных пространств*

Предложение 8. *Пусть* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — *проективная система компактных пространств относительно фильтрующегося множества индексов* I *такая, что* $f_{\alpha\alpha}$ *для каждого* $\alpha \in I$ *есть тождественное отображение,* $X = \varprojlim X_\alpha$ — *ее проективный предел и* f_α — *каноническое отображение* $X \to X_\alpha$ (§ 4, n° 4). *Тогда*:

1° X *компактно и для каждого* α *имеем*

$$f_\alpha(X) = \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(X_\beta). \tag{1}$$

2° *Если все* X_α *не пусты, то* X *не пусто.*

В самом деле, X есть замкнутое подпространство пространства $\prod_\alpha X_\alpha$ (§ 8, следствие 2 предложения 7) и, значит, компактно в силу теоремы 3 и предложения 3. Остальные утверждения вытекают из теоремы 1 Дополнения, в которой в качестве $\mathfrak{S}_\alpha$ взято множество всех замкнутых множеств пространства X_α; действительно, условия (I) и (II) — не что иное, как аксиомы (O'_I) и (C''); свойство (III) вытекает из замкнутости $\{x_\alpha\}$ и непрерывности $f_{\alpha\beta}$ (§ 2, теорема 1); наконец, свойство (IV) вытекает из следствия 2 теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — *проективная система топологических пространств относительно фильтрующегося множества индексов, причем для любой пары индексов* α, β *таких, что* $\alpha \leqslant \beta$, *и любого* $x_\alpha \in X_\alpha$ *множество* $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$ *компактно. Тогда выполняется соотношение* (1) *и* $f_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ *компактно для любого* $x_\alpha \in X_\alpha$.

В самом деле, для любого $x_\alpha \in \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(X_\beta)$ и любого $\beta \geqslant \alpha$ положим $L_\beta = \overset{-1}{f}_{\alpha\beta}(x_\alpha)$. Если $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, то $f_{\beta\gamma}(L_\gamma) \subset L_\beta$ и множество всех $\beta \geqslant \alpha$ кофинально множеству I. Ясно, что всевозможные L_β ($\beta \geqslant \alpha$) образуют проективную систему топологических пространств (относительно сужений отображений $f_{\beta\gamma}$), проективный предел L которой гомеоморфен $\overset{-1}{f}_\alpha(x_\alpha)$. Так как по предположению все L_β компактны и не пусты, то утверждения следствия вытекают из предложения 8.

Следствие 2. *Пусть* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *и* $(X'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ — *проективные системы топологических пространств относительно одного и того же фильтрующегося множества* I *и* (u_α) — *проективная система отображений* u_α: $X_\alpha \to X'_\alpha$. *Положим* $X = \varprojlim X_\alpha$, $X' = \varprojlim X'_\alpha$ *и* $u = \varprojlim u_\alpha$.

а) Если $\overset{-1}{u}_\alpha(x'_\alpha)$ *для некоторого* $x' = (x'_\alpha) \in X'$ *компактно и не пусто при любом* $\alpha \in I$, *то* $\overset{-1}{u}(x')$ *компактно и не пусто.*

б) *Если все* X_α *компактны, все* X'_α *отделимы, а все* u_α *сюръективны и непрерывны, то и* u *сюръективно.*

Положим $L_\alpha = \overset{-1}{u}_\alpha(x'_\alpha)$; ясно, что L_α образуют проективную систему топологических пространств (относительно сужений отображений $f_{\alpha\beta}$) и что $\overset{-1}{u}(x') = L$ — их проективный предел; поэтому утверждение а) вытекает из предложения 8. Утверждение б) непосредственно следует из него в силу предложения 3.

7. *Локально компактные пространства*

Определение 4. *Топологическое пространство* X *называется локально компактным, если оно отделимо и всякая его точка имеет компактную окрестность.*

Очевидно, всякое компактное пространство локально компактно; но обратное неверно: например, всякое *дискретное* пространство локально компактно, но в случае, если оно бесконечно, не компактно.

°Как мы увидим в § 2 гл. IV, *числовая прямая* **R** есть локально компактное, но не компактное пространство.°

Предложение 9. *Всякое локально компактное пространство регулярно.*

В самом деле, всякая точка x локально компактного пространства X имеет компактную окрестность V; так как X отделимо, то V замкнута (предложение 4); с другой стороны, V — регулярное подпространство (следствие предложения 1) и, значит, X регулярно (§ 8, предложение 13).

Следствие. *В локально компактном пространстве всякая точка обладает фундаментальной системой компактных окрестностей.*

В самом деле, пересечение любой замкнутой окрестности точки x с компактной окрестностью этой точки является компактной окрестностью точки x (предложение 3).

Отметим, что существуют *неотделимые* топологические пространства, в которых всякая точка имеет фундаментальную систему компактных окрестностей (упражнение 5).

Следствие предложения 9 обобщается следующим образом:

Предложение 10. *В локально компактном пространстве X всякое компактное множество K обладает фундаментальной системой компактных окрестностей.*

В самом деле, пусть U — произвольная окрестность множества K; для любого $x \in K$ существует компактная окрестность $W(x)$ точки x, содержащаяся в U. Когда x пробегает множество K, внутренности множеств $W(x)$ образуют его открытое покрытие, следовательно, существует конечное число точек $x_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что внутренности множеств $W(x_i)$ образуют покрытие множества K; объединение V множеств $W(x_i)$ и будет тогда компактной окрестностью множества K, содержащейся в U (предложение 5).

Предложение 11. *Пусть F — множество в локально компактном пространстве X такое, что его пересечение $F \cap K$ с любым компактным множеством K из X компактно; тогда F замкнуто в X.*

В силу предложения 4 это вытекает из предложения 3а § 3.

Предложение 12. *В отделимом пространстве X всякое локально компактное подпространство A локально замкнуто.*

В самом деле, каждая точка $x \in A$ обладает по предположению окрестностью V в X такой, что $V \cap A$ компактно и, следовательно, замкнуто в V (предложение 4).

Предложение 13. *В локально компактном пространстве X всякое локально замкнутое подпространство локально компактно.*

В самом деле, пусть A локально замкнуто в X; каждое $x \in A$ обладает такой окрестностью U в X, что $U \cap A$ замкнуто в U. Пусть $V \subset U$ — компактная окрестность точки x в X; тогда $V \cap A = (U \cap A) \cap V$ замкнуто в V и, значит, компактно (предложение 3); и так как это — окрестность точки x в A, то предложение доказано (поскольку A очевидным образом отделимо).

Теорема 1 и следствие 2 теоремы 2 *не распространяются* на локально компактные, но не компактные пространства.

Например, в бесконечном дискретном пространстве фильтр всех множеств, содержащих точку x и обладающих конечным дополнением, имеет единственную точку прикосновения x и, однако, не сходится к x. Далее, любое отображение бесконечного дискретного пространства X в отделимое пространство X' непрерывно, однако при таком отображении образ произвольного (а, значит, и замкнутого) множества из X не будет, вообще говоря, замкнутым в X'.

Теореме 3 соответствует следующее предложение:

Предложение 14. а) *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство локально компактных пространств, которые для всех кроме конечного числа индексов компактны. Тогда $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ локально компактно.*

б) *Обратно, если произведение семейства $(X_\iota)_{\iota \in I}$ непустых топологических пространств локально компактно, то все X_ι, за исключением конечного их числа, компактны, некомпактные же сомножители локально компактны.*

а) Пусть $x = (x_\iota)$ — точка из X; для каждого ι такого, что X_ι локально компактно, но не компактно, пусть V_ι — компактная окрестность точки x_ι в X_ι; для остальных индексов ι положим $V_\iota = X_\iota$; тогда $\prod_\iota V_\iota$ будет компактной окрестностью точки x в X

(теорема 3). Так как, к тому же, X отделимо (§ 8, предложение 7), то заключаем, что X локально компактно.

б) Пусть $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$ локально компактно и все X_ι не пусты. Каждое X_ι гомеоморфно замкнутому подпространству пространства X (§ 4, предложение 4 и следствие предложения 7). С другой стороны, пусть $a=(a_\iota)$ — точка из X и V — ее компактная окрестность; так как $\mathrm{pr}_\iota V=X_\iota$ для всех кроме конечного числа индексов ι (§ 4, n° 1), то из следствия 1 теоремы 2 вытекает, что X_ι для всех кроме конечного числа индексов ι компактно.

8. *Погружение локально компактного пространства в компактное пространство*

Теорема 4 (Александров). *Для каждого локально компактного пространства X существуют компактное пространство X' и гомеоморфизм f пространства X на дополнение к некоторой точке в X'. При этом, если X'_1 — второе компактное пространство, для которого существует гомеоморфизм f_1 пространства X на дополнение к некоторой точке в X'_1, то существует, и притом единственный, гомеоморфизм g пространства X' на X'_1 такой, что $f_1=g\circ f$.*

Докажем сначала второе утверждение. Пусть $f(X)=X'-\{\omega\}$ и $f_1(X)=X'_1-\{\omega_1\}$; если гомеоморфизм g существует, то его единственность очевидна, ибо согласно определению для всех $x'\neq\omega$ должно выполняться равенство $g(x')=f_1(f^{-1}(x'))$ и, следовательно, $g(\omega)=\omega_1$. Остается показать, что биекция $g\colon X'\to X'_1$, определяемая этими формулами, взаимно непрерывна; а поскольку X' и X'_1 играют одинаковую роль, достаточно показать, что образ при g любой окрестности точки $x'\in X'$ есть окрестность точки $g(x')$ в X'_1. Но если $x'\neq\omega$, это очевидно из определения; если же V' — открытая окрестность точки ω в X', то $X'-V'=K$ замкнуто в X', тем самым компактно (предложение 3) и содержится в $f(X)$, а следовательно, $g(K)=f_1(f^{-1}(K))$ компактно (следствие 1 теоремы 2). Отсюда вытекает, что $g(V')=X'_1-g(K)$ есть открытая окрестность точки ω_1 (предложение 4), что и завершает доказательство того, что g — гомеоморфизм.

Докажем теперь первое утверждение теоремы. Пусть X' — сумма множества X и множества, состоящего из одного элемента ω,

причем X отождествлено с дополнением к $\{\omega\}$ в X'. Определим в X' топологию, приняв за множество $\mathfrak{O}$ открытых подмножеств в X' множество, образованное всеми открытыми множествами из X и всевозможными множествами вида $(X—K) \cup \{\omega\}$, где K — компактные множества из X. Так как всякое пересечение компактных множеств в X компактно (предложения 3 и 4) и всякое замкнутое подмножество компактного множества компактно (предложение 3), то $\mathfrak{O}$ удовлетворяет аксиоме (O_I). Так как объединение всякого конечного семейства компактных множеств в X компактно (предложение 5), то $\mathfrak{O}$ удовлетворяет также аксиоме (O_{II}). Поскольку всякое компактное множество в X замкнуто в X (предложение 4), топология, индуцируемая в X из X', совпадает с исходной топологией в X. Для доказательства первого утверждения теоремы остается показать, что X' компактно. Прежде всего, X' *отделимо*: в самом деле, любые две различные точки x и y пространства X обладают в X непересекающимися открытыми окрестностями V и W, а они открыты также в X'; с другой стороны, любая точка $x \in X$ обладает компактной окрестностью K в X, являющейся также окрестностью точки x в X', а тогда $U = (X—K) \cup \{\omega\}$ будет окрестностью точки ω в X' такой, что $U \cap K = \varnothing$. Наконец, X' *квазикомпактно*: в самом деле, пусть $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие пространства X'; по крайней мере для одного индекса $\mu \in L$ имеем $U_\mu = (X—K_\mu) \cup \{\omega\}$, где K_μ — компактное множество в X; следовательно, существует такое конечное множество $H \subset L$, что множества U_λ с $\lambda \in H$ образуют покрытие множества K_μ; тогда $(U_\lambda)_{\lambda \in J}$, где $J = H \cup \{\mu\}$, является покрытием пространства X', чем и завершается доказательство его компактности.

Заметим, что если X само *компактно*, то ω будет *изолированной* точкой компактного пространства X' и, следовательно, X' — *суммой* (§ 2, n° 4, пример III) пространств X и $\{\omega\}$.

Рассматривая компактное пространство X', полученное описанным образом из локально компактного пространства X путем присоединения элемента ω, часто называют ω «бесконечно удаленной точкой» пространства X' и говорят, что X' получается из X *присоединением бесконечно удаленной точки*; X' называют также *компактификацией Александрова* локально компактного пространства X.

°Пример. Применив теорему Александрова к числовой плоскости $\mathbf{R}^2$, мы получим компактное пространство, которое можно

следующим образом гомеоморфно отобразить на сферу S_2, заданную в пространстве $\mathbf{R}^3$ уравнением $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$: точке ω, присоединяемой к $\mathbf{R}^2$ (бесконечно удаленной точке) ставим в соответствие точку (0, 0, 1) сферы S_2, каждой же точке (x_1, x_2) из $\mathbf{R}^2$ относим точку, в которой прямая, соединяющая точки (0, 0, 1) и $(x_1, x_2, 0)$, пересекает S_2. Этот гомеоморфизм известен под названием *стереографической проекции* (см. Алгебра, гл. IX, § 10, упражнение 14 и Общая топология, гл. VI, § 2, n° 4).∘

9. *Локально компактные пространства, счетные в бесконечности*

Определение 5. *Говорят, что локально компактное пространство X счетно в бесконечности, если оно является счетным объединением компактных множеств.*

Примеры. 1) Для того чтобы *дискретное* пространство было счетно в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы оно было счетно.

°2) Числовая прямая $\mathbf{R}$ есть локально компактное пространство, счетное в бесконечности, ибо она является объединением компактных интервалов $[-n, +n]$, где n пробегает $\mathbf{N}$.∘

Замечание. Отделимое топологическое пространство может быть объединением счетного семейства компактных подпространств, не будучи при этом локально компактным. °Как будет доказано впоследствии, примером такого пространства может служить гильбертово пространство, наделенное *слабой* топологией (Топ. вект. простр., гл. V, § 1, теорема 4).∘

Предложение 15. *В локально компактном пространстве X, счетном в бесконечности, существует последовательность (U_n) относительно компактных открытых множеств, образующих покрытие X и таких, что $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ для каждого n.*

В самом деле, X есть объединение последовательности (K_n) компактных множеств. Пусть U_1 — относительно компактная открытая окрестность множества K_1 (предложение 10); определим по индукции U_n для $n>1$ как относительно компактную открытую окрестность множества $\overline{U}_{n-1} \cup K_n$ (предложения 5 и 10); ясно, что U_n образуют требуемую последовательность.

Следствие 1. *В обозначениях предложения* 15 *для каждого компактного множества* K *в* X *существует целое* n *такое, что* $K \subset U_n$.

В самом деле, существует конечное число множеств U_k, покрывающее K (аксиома Бореля — Лебега).

Следствие 2. *Пусть* X *— локально компактное пространство и* X' *— компактное пространство, получаемое присоединением к* X *бесконечно удаленной точки* ω (n° 8). *Для того чтобы* X *было счетно в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы точка* ω *обладала в* X' *счетной фундаментальной системой окрестностей.*

Условие достаточно, ибо дополнения открытых окрестностей точки ω компактны в X. Оно необходимо, ибо если $U_n \subset X$ суть множества, обладающие свойствами, указанными в предложении 15, то окрестности $X' - \overline{U}_n$ точки ω в X' в силу следствия 1 образуют фундаментальную систему окрестностей этой точки.

Очевидно, всякое *замкнутое* подпространство локально компактного пространства, счетного в бесконечности, есть локально компактное пространство, счетное в бесконечности. Точно так же и произведение любого конечного семейства счетных в бесконечности локально компактных пространств счетно в бесконечности.

Отметим, что, напротив, *открытое* подпространство компактного пространства не обязательно счетно в бесконечности, как это показывает теорема Александрова (теорема 4).

10. *Паракомпактные пространства*

Определение 6. *Топологическое пространство* X *называют паракомпактным, если оно отделимо и удовлетворяет следующей аксиоме*:

(PC) *Для любого открытого покрытия* $\mathfrak{R}$ *пространства* X *существует* локально конечное *открытое покрытие* $\mathfrak{R}'$ *пространства* X, *мажорирующее* $\mathfrak{R}$ (Теор. множ., гл. II, § 4, определение 5).

Очевидно, всякое *компактное* пространство паракомпактно. Всякое *дискретное* пространство X паракомпактно, ибо открытое покрытие, образованное всеми одноточечными множествами, локально конечно и мажорирует любое открытое покрытие пространства X.

Предложение 16. *Всякое замкнутое подпространство F паракомпактного пространства X паракомпактно.*

В самом деле, F отделимо. С другой стороны, пусть (V_ι) — открытое покрытие в подпространстве F. Каждое V_ι имеет вид $V_\iota = U_\iota \cap F$, где U_ι — открытое множество в X. Рассмотрим открытое покрытие $\mathfrak{R}$ пространства X, состоящее из $\mathbf{C}F$ и всех U_ι; существует локально конечное открытое покрытие $\mathfrak{R}'$ пространства X, мажорирующее $\mathfrak{R}$, и следы на F множеств из $\mathfrak{R}'$ образуют локально конечное открытое покрытие пространства F, мажорирующее данное покрытие (V_ι).

Напротив, открытое подпространство компактного пространства не обязательно паракомпактно (упражнение 12).

Предложение 17. *Произведение паракомпактного и компактного пространств паракомпактно.*

Пусть X — паракомпактное пространство, Y — компактное пространство и $\mathfrak{R}$ — открытое покрытие пространства $X \times Y$. Для каждой точки $(x, y) \in X \times Y$ существуют открытая окрестность $V(x, y)$ точки x в X и открытая окрестность $W(x, y)$ точки y в Y такие, что $V(x, y) \times W(x, y)$ содержится в некотором множестве из $\mathfrak{R}$. Для каждого $x \in X$ множество всех $W(x, y)$, где y пробегает Y, образует открытое покрытие пространства Y, а потому в Y существует конечное число точек y_i $(1 \leqslant i \leqslant n(x))$ таких, что уже множества $W(x, y_i)$ образуют открытое покрытие пространства Y. Положим $U(x) = \bigcap_{i=1}^{n(x)} V(x, y_i)$; каждое из открытых множеств $U(x) \times W(x, y_i)$ содержится в некотором множестве из $\mathfrak{R}$. Пусть тогда $(T_\iota)_{\iota \in I}$ — локально конечное открытое покрытие пространства X, мажорирующее покрытие, образованное всеми $U(x)$ $(x \in X)$. Пусть, далее, x_ι для каждого $\iota \in I$ — точка из X, для которой $T_\iota \subset U(x_\iota)$, и $S_{\iota,k}$ — множества $W(x_\iota, y_k)$, соответствующие этой точке $(1 \leqslant k \leqslant n(x_\iota))$. Очевидно, множества $T_\iota \times S_{\iota,k}$ $(\iota \in I$, $1 \leqslant k \leqslant n(x_\iota)$ для каждого $\iota \in I)$ образуют открытое покрытие пространства $X \times Y$, мажорирующее $\mathfrak{R}$; покажем, что это покрытие локально конечно. Действительно, для каждой пары $(x, y) \in X \times Y$ существует окрестность Q точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств T_ι; тогда окрестность $Q \times Y$ точки (x, y)

тем более пересекается лишь с конечным числом множеств вида $T_\iota \times S_{\iota,k}$.

Напротив, произведение двух паракомпактных пространств не обязательно паракомпактно (см. главу IX, 2-е изд., § 5, упражнение 16).

Предложение 18. *Сумма X семейства паракомпактных пространств $(X_\iota)_{\iota \in I}$* (§ 2, n° 4, пример III) *паракомпактна.*

В самом деле, пусть $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие пространства X; покрытие, образованное открытыми множествами $X_\iota \cap V_\lambda$, мажорирует (V_λ). Пусть $(U_{\iota,\mu})_{\mu \in M_\iota}$ для каждого $\iota \in I$ — локально конечное открытое покрытие пространства X_ι, мажорирующее $(V_\lambda \cap X_\iota)_{\lambda \in L}$; тогда открытое покрытие пространства X, образованное множествами $U_{\iota,\mu}$ ($\iota \in I$, $\mu \in M_\iota$ для каждого $\iota \in I$), локально конечно и мажорирует (V_λ).

Теорема 5. *Для того чтобы локально компактное пространство X было паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было суммой семейства локально компактных пространств, счетных в бесконечности.*

Докажем сначала *необходимость* условия. Пусть X паракомпактно и V_x для каждого $x \in X$ — относительно компактная открытая окрестность точки x в X. По предположению существует локально конечное открытое покрытие $(U(\alpha))_{\alpha \in A}$ пространства X, мажорирующее покрытие, образованное множествами V_x ($x \in X$); поэтому все $U(\alpha)$ относительно компактны. Всякое компактное множество K в X пересекается лишь с конечным числом множеств $U(\alpha)$: действительно, непустые множества $U(\alpha) \cap K$ образуют локально конечное открытое покрытие компактного пространства K и, значит, это покрытие необходимо конечно (n° 1). Рассмотрим теперь следующее отношение R между двумя точками x и y из X: «существует конечная последовательность индексов $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ из A такая, что $x \in U(\alpha_1)$, $y \in U(\alpha_n)$ и $U(\alpha_i) \cap U(\alpha_{i+1}) \neq \varnothing$, если $1 \leqslant i \leqslant n-1$». Непосредственно ясно, что R есть *отношение эквивалентности*; кроме того, всякий класс эквивалентности по R есть *открытое* множество в X, как это сразу вытекает из определения R и того, что все $U(\alpha)$ открыты. Таким образом, пространство X есть *сумма* локально компактных подпространств (предложение 13), образованных классами эквивалентности по R; все сводится теперь

к тому, чтобы доказать, что каждое из этих подпространств есть объединение некоторого *счетного* подсемейства семейства $(U(\alpha))$.

Итак, пусть x — произвольная точка из X, а (C_n) — последовательность относительно компактных открытых множеств в X, индуктивно определяемых следующим образом: C_1 есть объединение всех множеств $U(\alpha)$, содержащих x, а C_n при $n>1$ есть объединение всех множеств $U(\alpha)$, пересекающих C_{n-1}. Индукцией по n непосредственно убеждаемся в том, что каждое из C_n относительно компактно и является объединением *конечного* числа множеств $U(\alpha)$. Покажем, что класс точки x по R есть *объединение* всех C_n; действительно, если $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — последовательность индексов такая, что $x\in U(\alpha_1)$ и $U(\alpha_i)\cap U(\alpha_{i+1})\neq\varnothing$, когда $1\leqslant i\leqslant n-1$, то индукцией по i получаем, что $U(\alpha_i)\subset C_i$, когда $1\leqslant i\leqslant n$. Этим и завершается доказательство первой части теоремы.

Докажем теперь *достаточность* условия теоремы. В силу предложения 18 можно ограничиться тем случаем, когда X *счетно в бесконечности*. Пусть $\mathfrak{R}=(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ — произвольное открытое покрытие пространства X и пусть, с другой стороны, (U_n) — последовательность относительно компактных открытых множеств в X, обладающая свойствами, указанными в предложении 15; обозначим через K_n компактное множество $\overline{U}_n - U_{n-1}$ (условившись считать $U_n=\varnothing$ при $n\leqslant 0$). Открытое множество $U_{n+1}-\overline{U}_{n-2}$ есть по построению окрестность множества K_n; таким образом, каждая точка $x\in K_n$ обладает окрестностью W_x, содержащейся в некотором множестве G_λ, а также в $U_{n+1}-\overline{U}_{n-2}$. Так как K_n компактно, то существует конечное число множеств вида W_x, образующих его покрытие; пусть H_{ni} $(1\leqslant i\leqslant p_n)$ — эти множества. Очевидно, семейство $\mathfrak{R}'$ множеств H_{ni} $(n\geqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant p_n$ для каждого $n)$ есть открытое покрытие пространства X, мажорирующее $\mathfrak{R}$; покажем, что $\mathfrak{R}'$ *локально конечно*. Пусть z — произвольная точка из X и n — наименьшее целое число, для которого $z\in U_n$; поскольку $z\notin U_{n-1}$, существует окрестность T точки z, содержащаяся в U_n и не пересекающаяся с $\overline{U}_{n-2}$; следовательно, T может пересекаться только с теми множествами H_{mi}, для которых $n-2\leqslant m\leqslant n+1$, а таких имеется только конечное число. Тем самым теорема полностью доказана.

В процессе доказательства мы установили, кроме того, такое

Следствие. *Если X — паракомпактное локально компактное пространство, то для любого открытого покрытия $\mathfrak{R}$ пространства X существует мажорирующее его локально конечное открытое покрытие $\mathfrak{R}'$, состоящее из относительно компактных множеств. Если X счетно в бесконечности, то можно, кроме того, считать $\mathfrak{R}'$ счетным.*

Упражнения

1) Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{S}$ — система образующих его топологии (§ 2, n° 3). Показать, что если всякое открытое покрытие пространства X, образованное множествами из $\mathfrak{S}$, содержит его конечное покрытие, то X квазикомпактно. [Заметить, что если бы некоторый ультрафильтр $\mathfrak{U}$ в X не был сходящимся, то всякая точка $x \in X$ содержалась бы в некотором множестве из $\mathfrak{S}$, не принадлежащем $\mathfrak{U}$, и использовать следствие предложения 5 § 6.]

2) Показать, что *вполне упорядоченное* множество X, наделенное топологией $\mathscr{T}_-(X)$ (§ 2, упражнение 5), локально компактно; для того чтобы оно было компактным, необходимо и достаточно, чтобы в нем имелся наибольший элемент. Вывести отсюда, что во всяком множестве существует топология компактного пространства.

3) а) Пусть X — отделимое пространство, A и B — его непересекающиеся компактные подмножества. Показать, что существуют окрестность множества A и окрестность множества B, не имеющие общих точек.

б) Пусть X — регулярное пространство, A — компактное множество в X и B — замкнутое множество в X, не пересекающееся с A. Показать, что существуют окрестность множества A и окрестность множества B, не имеющие общих точек.

4) Показать, что в определенном в упражнении 6 § 7 пространстве X, которое регулярно (§ 8, упражнение 16), всякое компактное множество конечно.

5) °а) В неотделимом достижимом пространстве $Y = X/S$, определенном в упражнении 7 § 8, всякая точка обладает компактной окрестностью; образы α и β в Y точек 1 и -1 обладают незамкнутыми компактными окрестностями; пересечение некоторой компактной окрестности точки α с некоторой компактной окрестностью точки β не квазикомпактно, а их объединение не компактно.

б) Пусть X — сумма множества $\mathbf{N}$ и бесконечного множества A; определим для каждого $x \in X$ базис фильтра $\mathfrak{S}(x)$ следующим образом: если $x \in \mathbf{N}$, то $\mathfrak{S}(x)$ состоит из одного элемента $\{x\}$; если $x \in A$ и $S_{x,n}$ означает множество, состоящее из x и всех целых чисел $\geqslant n$, то $\mathfrak{S}(x)$ есть множество всех $S_{x,n}$, где n пробегает $\mathbf{N}$. Показать, что в X имеется топология, для которой $\mathfrak{S}(x)$ есть фундаментальная система

окрестностей точки x для любого $x \in X$; пространство X, наделенное этой топологией, достижимо, но неотделимо; оно не квазикомпактно, но в нем существуют всюду плотные компактные множества.

в) Показать, что две топологии достижимого квазикомпактного пространства в одном и том же множестве X могут быть сравнимы и различны. [См. § 8, упражнения 7 и 5б.]

6) Пусть X и Y — топологические пространства и A (соотв. B) — квазикомпактное множество в X (соотв. Y). Показать, что для любой окрестности U множества $A \times B$ в $X \times Y$ существуют окрестности V множества A в X и W множества B в Y такие, что $V \times W \subset U$.

7) Дать пример проективной системы $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ квазикомпактных пространств, проективный предел которой пуст. [Заметить, что в пространстве примера 2 n° 1 всякое подпространство квазикомпактно.]

8) Пусть p — простое число. Обозначим через Z_n множество $\mathbf{Z}$ всех целых рациональных чисел, наделенное топологией, являющейся прообразом дискретной топологии относительно канонического отображения $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, и через f_{mn} для $m \leqslant n$ — тождественное отображение $Z_n \to Z_m$, которое будет непрерывным. Показать, что все Z_n — квазикомпактные пространства, но проективный предел проективной системы (Z_n, f_{mn}) не является квазикомпактным пространством *).

9) Пусть X — топологическое пространство, $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ — некоторое семейство графиков эквивалентностей в X с фильтрующимся по возрастанию предупорядоченным множеством индексов, R_α — отношение $(x, y) \in G_\alpha$ и φ_α — каноническое отображение $X \to X/R_\alpha$. Предположим, что при $\alpha \leqslant \beta$ отношение R_β влечет R_α, и обозначим через $\varphi_{\alpha\beta}$ каноническое отображение $X/R_\beta \to X/R_\alpha$; $(X/R_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических пространств; пусть $Y = \varprojlim (X/R_\alpha)$.

а) Пусть g: $X \to Y$ — непрерывное отображение $\varprojlim \varphi_\alpha$. Показать, что $g(X)$ всюду плотно в Y и что $g^{-1}(g(x))$ для каждого $x \in X$ есть класс точки x по отношению эквивалентности, графиком которого служит пересечение всех G_α.

б) Предположим, что все отношения эквивалентности R_α замкнуты и что для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности V существует индекс α такой, что класс точки x по R_α содержится в V. Показать, что при этих условиях g есть *открытое* отображение пространства X на $g(X)$.

в) Если предположить, что классы по отношениям R_α — замкнутые квазикомпактные множества, то g *сюръективно*.

10) Пусть X — достижимое пространство и $\mathfrak{F}$ — некоторое множество его замкнутых квазикомпактных подмножеств, содержащее все конечные подмножества и обладающее тем свойством, что объединение любых двух множеств из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Пусть X' — сумма множества X и одноточечного множества $\{\omega\}$. Показать, что в X'

*) Этот (неопубликованный) пример сообщен нам Д. Зелинским.

существует достижимая квазикомпактная топология, индуцирующая в X заданную топологию и такая, что дополнения в X' множеств из $\mathfrak{R}$ образуют фундаментальную систему открытых окрестностей точки ω. Дать примеры различных топологий в X', соответствующих различным множествам $\mathfrak{R}$.

11) Пусть X — паракомпактное пространство. Показать, что если всякое его открытое подпространство паракомпактно, то то же справедливо и для любого подпространства. Вывести отсюда, что всякое подпространство локально компактного пространства, топология которого обладает счетным базисом, паракомпактно. [См. гл. IX, 2-е изд., § 2, упражнение 20а.]

*12) Пусть X_0 — несчетное вполне упорядоченное множество, обладающее наибольшим элементом, a — его наименьший элемент и b — наименьший из тех элементов $x \in X_0$, для которых интервал $[a, x[$ несчетен. Обозначим через X интервал $[a, b[$, наделенный топологией $\mathscr{T}_-(X)$.

а) Пространство X локально компактно, но не компактно [упражнение 2], и всякая последовательность в X имеет предельную точку. [Заметить, что всякое счетное множество в X ограниченно.]

б) Пусть f — такое отображение пространства X в себя, что $f(x) < x$ для всех достаточно больших x; показать, что существует $c \in X$ такое, что для любого $x \in X$ имеется $y \geqslant x$, для которого $f(y) \leqslant c$. [Рассуждая от противного, образовать такую последовательность (z_n) точек из X, чтобы z_{n+1} было наименьшим из элементов $z' \in X$, для которых $f(x) \geqslant z_n$ при всех $x \geqslant z'$.]

в) Вывести из б), что X не паракомпактно.

13) Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{F}(X)$ — множество всех его непустых замкнутых подмножеств и $\mathfrak{K}(X)$ — множество всех непустых квазикомпактных множеств в X; наделим эти множества топологией, индуцируемой топологией $\mathscr{T}_\Omega$ пространства $\mathfrak{P}_0(X)$ (§ 2, упражнение 7).

а) Показать, что если $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}(X)$ квазикомпактно в топологии $\mathscr{T}_\Omega$ и X регулярно, то объединение всех множеств $M \in \mathfrak{B}$ замкнуто в X.

б) Показать, что если $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{K}(X)$ квазикомпактно в топологии $\mathscr{T}_\Omega$, то объединение всех множеств $M \in \mathfrak{B}$ квазикомпактно в X.

*14) В обозначениях упражнения 13 пусть $\mathfrak{F}(X)$ и $\mathfrak{K}(X)$ наделены топологией, индуцируемой топологией $\mathscr{T}_\Theta$ пространства $\mathfrak{P}_0(X)$ (§ 8, упражнение 12).

а) Показать, что если X квазикомпактно, то и $\mathfrak{F}(X)$ квазикомпактно. [Для каждого открытого множества U из X пусть $c(U)$ (соотв. $m(U)$) — множество всех замкнутых множеств M в X, содержащихся в U (соотв. пересекающихся с U). Показать, что множества $c(U)$ и $m(U)$ составляют систему образующих топологии пространства $\mathfrak{F}(X)$; использовать затем упражнение 1.]

б) Предположим, что X достижимо; пусть X' его образ при отображении $x \mapsto \{x\}$ пространства X в $\mathfrak{F}(X)$. Пусть $\mathfrak{H}$ — подпространство

пространства $\mathfrak{F}(X)$, содержащее X'; показать, что если $\mathfrak{H}$ квазикомпактно, то X квазикомпактно. [Заметить, что если (U_α) — открытое покрытие пространства X, то $(\mathfrak{V}_\alpha)$, где $\mathfrak{V}_\alpha$ — множество всех $M \in \mathfrak{F}(X)$, для которых $M \cap U_\alpha \neq \varnothing$, будет открытым покрытием пространства $\mathfrak{F}(X)$.]

в) Если X локально компактно, то $\mathfrak{K}(X)$ открыто в $\mathfrak{F}(X)$. [Использовать предложение 10.]

г) Пусть X достижимо. Показать, что для того чтобы $\mathfrak{K}(X)$ было отделимым (соотв. регулярным, компактным, локально компактным), необходимо и достаточно, чтобы тем же свойством обладало X. [Для первых двух утверждений использовать упражнение 12 § 8 и упражнение 3 § 9; для остальных двух использовать а), б) и упражнение 13.]

*15) Топологическое пространство X называется *пространством Линделефа*, если всякое его открытое покрытие содержит счетное покрытие. Всякое пространство, обладающее счетным базисом, есть пространство Линделефа; всякое квазикомпактное пространство есть пространство Линделефа.

а) Всякое замкнутое подпространство пространства Линделефа есть пространство Линделефа. Для того чтобы любое подпространство пространства Линделефа было пространством Линделефа, достаточно, чтобы всякое открытое подпространство было пространством Линделефа [см. упражнение 16].

б) Для всякого непрерывного отображения f пространства Линделефа X в топологическое пространство X' подпространство $f(X)$ пространства X' есть пространство Линделефа.

в) Всякое пространство, являющееся объединением счетного семейства подпространств Линделефа, есть пространство Линделефа. В частности, всякое счетное пространство есть пространство Линделефа.

г) Для того чтобы пространство Линделефа X было квазикомпактным, достаточно, чтобы всякая последовательность его точек обладала предельной точкой. [Показать, что тогда выполняется аксиома (C''').]

*16) а) Пусть X — пространство, всякое открытое подпространство которого есть пространство Линделефа. Показать, что X удовлетворяет условию (D_{III}) упражнения 7 § 1; если X регулярно, то всякое замкнутое множество в X является пересечением счетного семейства открытых множеств. [См. упражнение 24в.]

б) Пусть X — пространство, всякое открытое подпространство которого паракомпактно. Для того чтобы всякое открытое подпространство пространства X было пространством Линделефа, необходимо и достаточно, чтобы X удовлетворяло условию (D_{III}) упражнения 7 § 1.

в) Для того чтобы всякое открытое подпространство компактного пространства X было пространством Линделефа, необходимо и достаточно, чтобы X удовлетворяло условию (D_{III}) упражнения 7 § 1 и всякое замкнутое множество в X было пересечением счетного семейства открытых множеств. [Использовать б) и теорему 5.]

*17) Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Точку $a \in X$ называют *точкой конденсации* множества A, если всякая ее окрестность содержит *несчетное* множество точек из A.

а) Множество всех точек конденсации множества $A \subset X$ замкнуто. Дать пример, когда X имеет только одну точку конденсации. [См. теорему 4.]

б) Пусть X — достижимое пространство, всякое открытое подпространство которого есть пространство Линделефа (упражнение 16). Показать, что для любого множества $A \subset X$ множество B всех его точек конденсации совершенно, а множество $A \cap \complement B$ не более чем счетно.

*18) Точку a топологического пространства X называют *точкой полного накопления* множества $A \subset X$, если $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap U)$ для всякой окрестности U точки a. Показать, что для квазикомпактности X необходимо и достаточно, чтобы любое бесконечное множество $A \subset X$ обладало точкой полного накопления. [Показать, что если X не квазикомпактно, то существуют начальное ординальное число ω_α (Теор. множ., гл. III, § 6, упражнение 10) и такое открытое покрытие (U_ξ) пространства X, где ξ пробегает множество всех ординальных чисел $< \omega_\alpha$, что для каждого индекса $\xi < \omega_\alpha$ дополнение A_ξ в X к объединению всех U_η с индексами $\eta < \xi$ имеет мощность, равную $\aleph_\alpha$; вывести отсюда, что можно с помощью трансфинитной индукции определить такое семейство (x_ξ) $(\xi < \omega_\alpha)$ точек в X, что $x_\xi \in A_\xi$ для каждого ξ и $x_\xi \neq x_\eta$ при $\eta < \xi$.]

*19) Отделимое пространство X называют *абсолютно замкнутым*, если оно обладает следующим свойством: при любом гомеоморфизме f пространства X на подпространство произвольного отделимого пространства X' множество $f(X)$ замкнуто в X'. Всякое компактное пространство абсолютно замкнуто.

а) Показать равносильность следующих условий:

(AF) Пространство X абсолютно замкнуто.

(AF′) Всякий базис фильтра в X, состоящий из открытых множеств, имеет по крайней мере одну точку прикосновения.

(AF″) Всякое семейство замкнутых множеств в X, пересечение которого пусто, содержит конечное подсемейство, пересечение внутренностей множеств которого пусто.

(AF‴) Всякое открытое покрытие пространства X содержит конечное подсемейство, замыкания множеств которого образуют покрытие пространства X.

б) Пусть X — отделимое пространство и U — всюду плотное открытое множество в X. Предположим, что всякий базис фильтра в U, состоящий из открытых множеств, имеет по крайней мере одну точку прикосновения в X. Показать, что X тогда абсолютно замкнуто. В частности, если A — открытое множество в абсолютно замкнутом пространстве X, то подпространство $\overline{A}$ пространства X абсолютно замкнуто.

в) Пусть X — абсолютно замкнутое пространство и f — его непрерывное отображение в отделимое пространство X'. Показать, что $f(X)$ — абсолютно замкнутое подпространство пространства X'.

г) Показать, что произведение двух абсолютно замкнутых пространств абсолютно замкнуто. [Рассуждать, как при доказательстве предложения 17.]

*20) Отделимое пространство X называется *минимальным*, если его топология $\mathscr{T}$ обладает тем свойством, что всякая мажорируемая ею отделимая топология в X необходимо совпадает с $\mathscr{T}$; тогда $\mathscr{T}$ необходимо полурегулярна (§ 8, упражнение 20). Показать, что для минимальности отделимого пространства X необходимо и достаточно, чтобы всякий базис фильтра в X, состоящий из открытых множеств и имеющий по крайней мере одну точку прикосновения, был сходящимся, или, что то же, чтобы X было абсолютно замкнутым (упражнение 19) и всякий базис фильтра в X, состоящий из открытых множеств и имеющий единственную точку прикосновения, сходился к этой точке.

*21) Топологическое пространство X называется *вполне отделимым* (а его топология — *вполне отделимой*), если любые две различные точки x и y в X обладают непересекающимися *замкнутыми* окрестностями.

а) Всякое регулярное пространство вполне отделимо. Всякое подпространство вполне отделимого пространства вполне отделимо. Всякое произведение вполне отделимых пространств вполне отделимо. Всякая топология, мажорирующая вполне отделимую топологию, вполне отделима.

б) Всякое минимальное вполне отделимое пространство X (упражнение 20) компактно. [Рассуждать от противного, рассматривая ультрафильтр $\mathfrak{U}$ в X и базис фильтра, образованный открытыми множествами, принадлежащими $\mathfrak{U}$.]

°в) Пусть θ — иррациональное число >0. Для каждой точки $(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}_+$ и каждого $\alpha > 0$ обозначим через $B_\alpha(x, y)$ множество, состоящее из (x, y) и тех $(z, 0) \in \mathbf{Q}^2$, для которых $|z-(x+\theta y)|<\alpha$ или $|z-(x-\theta y)|<\alpha$. Пусть $V(x, y)$ — множество всех $B_\alpha(x, y)$, где α пробегает все вещественные числа >0. Показать, что в $\mathbf{Q}^2$ существует отделимая топология $\mathscr{T}$, в которой $V(x, y)$ для всякой точки $(x, y) \in \mathbf{Q}^2$ есть фундаментальная система окрестностей этой точки. Показать, что, каковы бы ни были точки a и b из $\mathbf{Q}^2$, всякая замкнутая окрестность точки a в топологии $\mathscr{T}$ пересекается со всякой замкнутой окрестностью точки b.

*22) а) Пусть X — отделимое пространство и $\mathscr{T}$ — его топология. Показать, что для того, чтобы X было абсолютно замкнутым (упражнение 19), необходимо и достаточно, чтобы полурегулярная топология $\mathscr{T}^*$, ассоциированная с $\mathscr{T}$ (§ 8, упражнение 20), была топологией *минимального* пространства (упражнение 20).

б) Если $\mathscr{T}$ вполне отделима (упражнение 21), то это верно и для $\mathscr{T}^*$. [Использовать упражнение 20 § 8.] Вывести отсюда, что абсолютно замкнутое регулярное пространство компактно.

*23) а) Пусть X — отделимое пространство и A — всюду плотное множество в X. Предположим, что всякий фильтр в A имеет по крайней мере одну точку прикосновения в X. Показать, что тогда X абсолютно замкнуто. [Проверить аксиому (AF') упражнения 19.]

б) Пусть X_0— компактное пространство с топологией $\mathscr{T}_0$, в котором существует всюду плотное не открытое множество A; $\mathscr{T}$ — топология в X_0, порождаемая всеми множествами, открытыми в $\mathscr{T}_0$, и множеством A, так что $\mathscr{T}^*=\mathscr{T}_0$ (§ 8, упражнение 20); наконец, X — некомпактное абсолютно замкнутое пространство, получающееся при наделении X_0 топологией $\mathscr{T}$ (упражнение 22). Показать, что всякий фильтр в A имеет точку прикосновения в X.

*24) а) Показать, что в *счетном* абсолютно замкнутом пространстве X множество изолированных точек всюду плотно. [Рассуждать от противного, располагая точки пространства X в последовательность и образуя по индукции счетное открытое покрытие (U_n) пространства X так, чтобы объединение никакого конечного семейства множеств $\overline{U}_n$ не покрывало X.]

°б) Дать пример вполне отделимого абсолютно замкнутого пространства, не являющегося пространством Линделефа. [Рассмотреть в произведении $[0, 1]\times[0, 1]$ дополнения к множествам $A\times\{0\}$, где A пробегает все подмножества отрезка $[0, 1]$, и применить общий метод упражнения 20в § 8.] Это пространство обладает свойством (D_{II}) упражнения 7 § 1, но не свойством (D_{III}).

в) Пусть X_0— компактное пространство без изолированных точек и $\mathfrak{M}$ — множество дополнений ко всевозможным счетным множествам в X_0, так что все множества из $\mathfrak{M}$ всюду плотны (см. а)). Пусть $\mathscr{T}$ — топология, порождаемая всеми открытыми подмножествами пространства X_0 и множествами из $\mathfrak{M}$. Показать, что пространство X, получающееся при наделении X_0 топологией $\mathscr{T}$, абсолютно замкнуто, вполне отделимо и является пространством Линделефа, которое не удовлетворяет условию (D_{II}) упражнения 7 § 1, не имеет ни одной точки, обладающей счетной фундаментальной системой окрестностей, и в котором никакая бесконечная последовательность попарно различных точек не имеет точки прикосновения. Если в X_0 всякое открытое подпространство есть пространство Линделефа (см. упражнение 16в), то и всякое открытое подпространство в X есть пространство Линделефа и, в частности, X удовлетворяет условию (D_{III}) (упражнение 16а). В частности, это имеет место, когда $X_0=[0, 1]$; показать, однако, что в этом случае в X имеются замкнутые счетные множества, не являющиеся пересечением счетного семейства открытых множеств (см. гл. IX, § 5, n° 3).

*25) а) Пусть X — отделимое пространство и Γ — множество всех фильтров в X, обладающих базисом из открытых множеств и не имеющих ни одной точки прикосновения в X. Показать, что множество Γ, если оно не пусто (иначе говоря, если X не абсолютно замкнуто), индуктивно.

б) Пусть Ω — множество всех *максимальных* фильтров в Γ и X' — сумма множеств X и Ω. Для каждого $x \in X$ обозначим через $\mathfrak{B}(x)$ множество всех окрестностей точки x в X; для каждого $\omega \in \Omega$ обозначим через $\mathfrak{B}(\omega)$ совокупность всех множеств вида $\{\omega\} \cup M$, где M пробегает фильтр ω. В X' имеется топология, в которой $\mathfrak{B}(x')$ есть фундаментальная система окрестностей точки x' для каждого $x' \in X'$. В этой топологии X' есть абсолютно замкнутое пространство, обладающее следующим универсальным свойством: для каждого открытого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ в абсолютно замкнутое пространство Y существует, и притом единственное, непрерывное отображение $g\colon X' \to Y$, продолжающее f. [Рассмотреть образы при f фильтров, принадлежащих Ω; заметить, что в абсолютно замкнутом пространстве максимальный фильтр в множестве всех фильтров, имеющих базис из открытых множеств, обязательно сходится.] В частности, топология пространства X' X-максимальная (§ 3, упражнение 11). Вывести отсюда существование абсолютно замкнутых пространств с квазимаксимальной топологией (§ 2, упражнение 6).

*26) а) Пусть X — достижимое пространство и Φ — множество всех фильтров в X, обладающих базисом из замкнутых множеств. Показать, что множество Φ индуктивно. Пусть X'' — множество всех максимальных фильтров в Φ.

б) Для каждого открытого множества U из X обозначим через U^* множество всех фильтров $\mathfrak{F} \in X''$, для которых $U \in \mathfrak{F}$. Для любых двух открытых множеств U и V из X имеем $(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$ и $(U \cup V)^* = U^* \cup V^*$. [Учесть, что если $\mathfrak{F} \in X''$ и $U \notin \mathfrak{F}$, то $X - U \in \mathfrak{F}$.] Показать, что множества U^* образуют базис топологии в X'', при которой X'' квазикомпактно [проверить аксиому (C'''), воспользовавшись предыдущим замечанием] и достижимо [показать, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — два различных элемента из X'', то в X существуют такие непересекающиеся замкнутые множества A и B, что $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{G}$].

в) Для каждого $x \in X$ обозначим через $\varphi(x)$ ультрафильтр в X, имеющий базис, состоящий из одного множества $\{x\}$. Показать, что φ есть гомеоморфизм пространства X на всюду плотное множество в X''. Если X квазикомпактно (и достижимо), то $\varphi(X) = X''$.

г) Показать, что для каждого непрерывного отображения f пространства X в компактное пространство Y существует, и притом единственное, непрерывное отображение $g\colon X'' \to Y$ такое, что $f = g \circ \varphi$.

д) Пусть $\tilde{X}$ — универсальное отделимое пространство, ассоциированное с X'' (§ 8, упражнение 27); показать, что каноническое отображение $\psi\colon X'' \to \tilde{X}$ сюръективно и $\tilde{X}$ компактно. Таким образом, всякое непрерывное отображение f пространства X в компактное пространство Y однозначно представимо в виде $f = h \circ \psi \circ \varphi$, где $h\colon \tilde{X} \to Y$ непрерывно.

27) Показать, что если X — дискретное пространство, то пространства X'' и $\tilde{X}$, определенные в упражнении 26, совпадают, и что

если $\mathscr{T}$ — топология пространства X', определенная в упражнении 25, то пространство X'' отождествимо с пространством X', наделенным полурегулярной топологией $\mathscr{T}^*$, ассоциированной с $\mathscr{T}$ (§ 8, упражнение 20). При этом множество X'' канонически отождествляется с множеством всех ультрафильтров в X, и компактное пространство X'' называется *пространством ультрафильтров* множества X.

*28) Показать, что в компактном пространстве X всякое изодинное бесконечное открытое подпространство U (§ 2, упражнение 11г) разрешимо. [Используя предложение 1, показать, что существует базис $\mathfrak{B}$ топологии пространства U, для которого $\mathrm{Card}(\mathfrak{B})=\mathrm{Card}(U)$; затем воспользоваться упражнением 11в § 2.] Вывести отсюда, что всякое локально компактное пространство без изолированных точек разрешимо [воспользоваться упражнением 11г § 2]; следовательно, такое пространство не субмаксимально.

29) а) Пусть K — дискретное пространство $\{0, 1\}$. Для каждого компактного пространства X обозначим через $\mathfrak{F}(X)$ множество всех его замкнутых подмножеств и через F множество всех отображений $f\colon K\to\mathfrak{F}(X)$, для которых $X=f(0)\cup f(1)$. Рассмотрим компактное пространство $Y=K^F$; показать, что для каждого $y=(y_f)_{f\in F}\in Y$ пересечение замкнутых подмножеств $f(y_f)$ пространства X пусто или сводится к одной точке. Множество Z тех $y\in Y$, для которых это пересечение не пусто, замкнуто в Y; обозначая для каждого $y\in Z$ через $\varphi(y)$ единственную точку, общую всем $f(y_f)$, показать, что φ — сюръективное непрерывное отображение Z в X.

б) Дать пример компактного пространства X, для которого не существует сюръективного непрерывного отображения компактного пространства вида K^A на X. [Использовать упражнение 4б § 4 и упражнение 27 § 9.]

*30) Топологическое пространство X называется *локально квазикомпактным*, если всякая его точка обладает фундаментальной системой квазикомпактных окрестностей.

а) Показать, что в локально квазикомпактном пространстве всякое квазикомпактное множество обладает фундаментальной системой квазикомпактных окрестностей.

б) Показать, что всякое локально замкнутое подпространство локально квазикомпактного пространства локально квазикомпактно.

°в) Рассмотрим в замкнутом евклидовом круге B: $\|x\|\leqslant 1$ плоскости $\mathbf{R}^2$ топологию $\mathscr{T}$, мажорирующую топологию $\mathscr{T}_0$, индуцируемую топологией пространства $\mathbf{R}^2$, и определяемую следующим образом: фильтр окрестностей любой точки $x\neq(1, 0)$ из B совпадает с фильтром окрестностей этой точки в топологии $\mathscr{T}_0$, точка же (1, 0) обладает фундаментальной системой окрестностей, состоящей из объединений множества $\{(1, 0)\}$ со следами на *открытом* круге B_0: $\|x\|<1$ открытых кругов с центром (1, 0). Пусть Y — множество B, наделенное топологией $\mathscr{T}$; рассмотрим в Y отношение эквивалентности R, классами

которого являются множество S тех $x \neq (1, 0)$, для которых $\|x\|=1$, и одноточечные множества из Y, не содержащиеся в S. Показать, что факторпространство $X=Y/R$ квазикомпактно, но не локально квазикомпактно.

§ 10. Совершенные отображения

В этом параграфе ι_X будет обозначать тождественное отображение множества X на себя.

1. Совершенные отображения

Если $f\colon X \to Y$ и $f'\colon X' \to Y'$ — *замкнутые непрерывные* отображения, произведение $f \times f'\colon X \times X' \to Y \times Y'$ не обязательно есть замкнутое отображение, даже если f имеет вид ι_X.

Пример. Всякое постоянное отображение отделимого пространства замкнуто. Однако если f — постоянное отображение $\mathbf{Q} \to \{0\}$, то произведение $f \times \iota_{\mathbf{Q}}$ есть отображение $(x, y) \to (0, y)$ плоскости $\mathbf{Q}^2$ в себя, совпадающее со второй проекцией и потому не замкнутое (§ 4, п° 2, замечание 1).

Определение 1. *Пусть f — отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. f называется совершенным отображением, если оно непрерывно и для любого топологического пространства Z отображение $f \times \iota_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ замкнуто.*

В п°п° 2 и 3 будут даны другие характеризации совершенных отображений.

Беря в определении 1 в качестве Z одноточечное пространство, получаем:

Предложение 1. *Всякое совершенное отображение замкнуто.*

Предложение 2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — инъективное непрерывное отображение. Тогда следующие три условия равносильны:*

а) *f совершенно.*

б) *f замкнуто.*

в) *f есть гомеоморфизм пространства X на замкнутое множество в Y.*

Мы уже видели, что а) влечет б). Так как отношение эквивалентности $f(x)=f(x')$ есть здесь отношение равенства, то факторпространство пространства X по этому отношению отождествимо с X, и, значит, б) влечет в) в силу предложения 3 § 5. Наконец, если в) выполнено, то $f\times\iota_Z$ есть гомеоморфизм пространства $X\times Z$ на некоторое замкнутое подпространство пространства $Y\times Z$ и, значит, замкнутое отображение, так что в) влечет а).

Предложение 3. *Пусть f: $X\to Y$ — непрерывное отображение; для каждого $T\subset Y$ обозначим через f_T отображение множества $f^{-1}(T)$ в T, совпадающее с f на $f^{-1}(T)$.*

а) *Если f совершенно, то и f_T совершенно.*

б) *Пусть $(T(\iota))_{\iota\in I}$ — семейство множеств в Y, внутренности которых образуют покрытие пространства Y или которые образуют локально конечное замкнутое покрытие этого пространства; если все $f_{T(\iota)}$ совершенные, то и f совершенное.*

Пусть Z — топологическое пространство. Для каждого $T\subset Y$ имеем $f_T\times\iota_Z=(f\times\iota_Z)_{T\times Z}$; если f совершенно, то $f\times\iota_Z$ замкнуто, а значит, и $(f\times\iota_Z)_{T\times Z}$ замкнуто (§ 5, предложение 2а), чем а) и доказано. Если теперь $(T(\iota))_{\iota\in I}$ обладает одним из свойств, сформулированных в б), то покрытие $(T(\iota)\times Z)_{\iota\in I}$ пространства $Y\times Z$ обладает тем же свойством; если все $f_{T(\iota)}$ совершенны, то все $(f\times\iota_Z)_{T(\iota)\times Z}$ замкнуты и, значит, $f\times\iota_Z$ замкнуто (§ 5, предложение 2б), что и завершает доказательство.

Предложение 4. *Пусть I — конечное множество и f_i: $X_i\to Y_i$ — непрерывное отображение для каждого $i\in I$. Положим $X=\prod_i X_i$, $Y=\prod_i Y_i$, и пусть f: $X\to Y$ есть произведение $(x_i)\mapsto(f_i(x_i))$ отображений f_i. Тогда:*

а) *Если каждое из отображений f_i совершенное, то и f совершенное.*

б) *Если f совершенное и все X_i не пусты, то каждое f_i совершенное.*

(Мы увидим в n° 2, следствие 3 теоремы 1, что это предложение распространяется и на бесконечные произведения.)

Применение индукции показывает, что достаточно рассмотреть случай, когда $I=\{1, 2\}$.

а) Предположим, что f_1 и f_2 — совершенные отображения, и пусть Z — топологическое пространство; отображение $f_1\times f_2\times\iota_Z$ является композицией отображений $\iota_{Y_1}\times f_2\times\iota_Z$ и $f_1\times\iota_{X_2}\times\iota_Z$, которые в силу предположения замкнуты; следовательно, $f_1\times f_2\times\iota_Z$ замкнуто (§ 5, предложение 1а) и $f=f_1\times f_2$ совершенно.

б) Предположим теперь, что f совершенно; пусть F — замкнутое множество в $X_2\times Z$ и G — его образ в $Y_2\times Z$ при отображении $f_2\times\iota_Z$; образ множества $X_1\times F$ в $Y_1\times Y_2\times Z$ при отображении $f_1\times f_2\times\iota_Z$ совпадает с $f_1(X_1)\times G$. В силу предположения, $f_1(X_1)\times G$ замкнуто в $Y_1\times Y_2\times Z$; если $X_1\neq\varnothing$, то $f_1(X_1)$ не пусто, а это влечет замкнутость G в $Y_2\times Z$ (§ 4, следствие предложения 7); следовательно, отображение f_2 совершенно. Так же доказывается, что f_1 совершенно, если $X_2\neq\varnothing$.

Предложение 5. *Пусть* $f\colon X\to X'$ *и* $g\colon X'\to X''$ — *непрерывные отображения. Тогда*:

а) *Если* f *и* g *совершенны, то* $g\circ f$ *совершенно.*

б) *Если* $g\circ f$ *совершенно и* f *сюръективно, то* g *совершенно.*

в) *Если* $g\circ f$ *совершенно и* g *инъективно, то* f *совершенно.*

г) *Если* $g\circ f$ *совершенно и* X' *отделимо, то* f *совершенно.*

Пусть Z — топологическое пространство. Имеем $(g\circ f)\times\iota_Z=(g\times\iota_Z)\circ(f\times\iota_Z)$; если f и g совершенны, то $f\times\iota_Z$ и $g\times\iota_Z$ замкнуты и, следовательно (§ 5, предложение 1а), $(g\circ f)\times\iota_Z$ замкнуто, чем а) и доказано. Так же доказываем б) (соотв. в)), применяя пункт б) (соотв. в)) предложения 1 § 5 и замечая, что если f сюръективно (соотв. g инъективно), то $f\times\iota_Z$ сюръективно (соотв. $g\times\iota_Z$ инъективно). Предположим теперь, что выполнены предположения пункта г). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X\times X' \\ f\downarrow & & \downarrow (g\circ f)\times\iota_{X'} \\ X' & \xrightarrow[\psi]{} & X''\times X' \end{array} \qquad (1)$$

где $\varphi(x)=(x, f(x))$ и $\psi(x')=(g(x'), x')$. Отображение φ (соотв. ψ) есть гомеоморфизм пространства X (соотв. X') на график отображения f (соотв. на пространство, симметричное графику отображения g) (§ 4, следствие 2 предложения 1); при этом, поскольку

X' отделимо, график $\varphi(X)$ отображения f замкнут в $X\times X'$ (§ 8, следствие 2 предложения 2). Следовательно (предложение 2), φ совершенно; с другой стороны, предложение 4 показывает, что $(g\circ f)\times\iota_{X'}$ совершенно. В силу а) и коммутативности диаграммы (1), $\psi\circ f$ совершенно, и так как ψ инъективно, то из в) вытекает, что f совершенно.

Замечание. Если X' неотделимо, то $g\circ f$ может оказаться совершенным и без того, чтобы f было совершенным; для этого достаточно принять за X и X'' (соотв. X') множества, состоящие из одного (соотв. двух) элемента, и наделить X' слабейшей топологией.

Следствие 1. *Сужение совершенного отображения* $f\colon X\to Y$ *на всякое замкнутое множество* F *в* X *есть совершенное отображение пространства* F *в* Y.

В самом деле, это сужение есть композиция $f\circ j$, где $j\colon F\to X$ — каноническая инъекция, которая совершенна (предложение 2).

Следствие 2. *Пусть* $f\colon X\to Y$ *— совершенное отображение. Если* X *отделимо, то подпространство* $f(X)$ *пространства* Y *отделимо.*

В силу предложения 5в, можно ограничиться тем случаем, когда $f(X)=Y$. Тогда диагональ в $Y\times Y$ есть образ при отображении $f\times f$ диагонали из $X\times X$, которая замкнута (§ 8, предложение 1); поскольку $f\times f$ совершенно (предложение 4), диагональ в $Y\times Y$ замкнута (предложение 1), а следовательно, Y отделимо (§ 8, предложение 1).

Следствие 3. *Пусть* I *— конечное множество и* $f_i\colon X\to Y_i$ *для каждого* $i\in I$ *— совершенное отображение. Если* X *отделимо, то отображение* $x\mapsto(f_i(x))$ *пространства* X *в* $\prod_i Y_i$ *совершенно.*

В самом деле, это отображение есть композиция отображения $(x_i)\mapsto(f_i(x_i))$ пространства X^I в $\prod_i Y_i$ и диагонального отображения пространства X в X^I; так как это последнее совершенно (предложение 1 § 8 и предложение 2), то справедливость утверждения следует из предложений 4 и 5а.

Следствие 4. *Пусть* X *и* Y *— топологические пространства,* $f\colon X\to Y$ *— непрерывное отображение,* R *— отношение эквивалент-*

ности $f(x)=f(y)$ *в* X *и* $X\xrightarrow{p}X/R\xrightarrow{h}f(X)\xrightarrow{\iota}Y$ — *каноническое разложение отображения* f. *Для того чтобы* f *было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы* p *было совершенным,* h — *гомеоморфизмом и* $f(X)$ — *замкнутым в* Y.

Условия достаточны в силу предложений 5а и 2. Обратно, если f совершенно, то оно замкнуто, чем уже установлено, что $f(X)$ замкнуто в Y, а h — гомеоморфизм (§ 5, предложение 3); кроме того, $h\circ p$ совершенно по предложению 5в и значит $p=h^{-1}\circ(h\circ p)$ совершенно по предложению 5а.

2. *Характеризация совершенных отображений свойствами компактности*

В этом n° *мы будем обозначать через* P *пространство, состоящее из одной точки и наделенное своей единственной топологией.*

Лемма 1. *Топологическое пространство* X, *для которого отображение* $X\to P$ *совершенно, квазикомпактно.*

(Несколько позже мы увидим (следствие 1 теоремы 1), что это свойство *характеризует квазикомпактные* пространства.)

Можно ограничиться случаем, когда X не пусто. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в X, $X'=X\cup\{\omega\}$ — топологическое пространство, ассоциированное с $\mathfrak{F}$ (§ 6, n° 5, пример). Пусть, далее, Δ — множество в $X\times X'$, образованное парами (x, x), где x пробегает X, и $F=\overline{\Delta}$ — его замыкание в $X\times X'$. Вследствие сделанного относительно X предположения образ множества F при проекции $X\times X'\to X'$ замкнут в X'; поскольку этот образ содержит X, он необходимо содержит ω, являющееся точкой прикосновения для X; иначе говоря, существует такое $x\in X$, что $(x, \omega)\in F$. По определению топологии произведения $X\times X'$ это означает, что для каждой окрестности V точки x в X и каждого множества $M\in\mathfrak{F}$ мы имеем $(V\times M)\cap\Delta\neq\varnothing$, т. е. $V\cap M\neq\varnothing$; другими словами, x есть точка прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть* f: $X\to Y$ — *непрерывное отображение. Следующие четыре свойства равносильны:*

а) f *совершенно.*

б) f *замкнуто и* $f^{-1}(y)$ *для каждого* $y\in Y$ *квазикомпактно.*

в) *Если* $\mathfrak{F}$ — *фильтр в* X *и* $y \in Y$ — *точка прикосновения базиса фильтра* $f(\mathfrak{F})$, *то существует точка прикосновения* x *фильтра* $\mathfrak{F}$ *в* X *такая, что* $f(x)=y$.

г) *Если* $\mathfrak{U}$ — *ультрафильтр в* X *и* $y \in Y$ — *предел базиса ультрафильтра* $f(\mathfrak{U})$, *то существует предел* x *ультрафильтра* $\mathfrak{U}$ *такой, что* $f(x)=y$.

а) *влечет* б): действительно, если f совершенно, то f замкнуто (предложение 1) и отображение $f_{\{y\}}\colon \overset{-1}{f}(y) \to \{y\}$ для каждого $y \in Y$ совершенно (предложение 3а). По лемме 1 это влечет квазикомпактность $\overset{-1}{f}(y)$.

б) *влечет* в): предположим, что $\mathfrak{F}$ и y удовлетворяют предположениям пункта в), и пусть $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в X, образованный замыканиями всех множеств из $\mathfrak{F}$. Так как f замкнуто, то $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$ для всех $M \in \mathfrak{F}$ (§ 5, предложение 9). Это показывает, что множества $\overline{M} \cap \overset{-1}{f}(y)$ для всех $M \in \mathfrak{F}$ не пусты и потому образуют базис фильтра в $\overset{-1}{f}(y)$, состоящий из замкнутых множеств в $\overset{-1}{f}(y)$. Поскольку $\overset{-1}{f}(y)$ квазикомпактно, существует $x \in \overset{-1}{f}(y)$, принадлежащее всем $\overline{M}$ $(M \in \mathfrak{F})$; тогда $f(x)=y$ и x — точка прикосновения для $\mathfrak{F}$.

в) *влечет* г) тривиальным образом.

г) *влечет замкнутость* f. В самом деле, пусть A — непустое замкнутое множество в X и $\mathfrak{F}$ — фильтр всех подмножеств из X, содержащих A; тогда A будет множеством всех точек прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$. Пусть B — множество всех точек прикосновения фильтра с базисом $f(\mathfrak{F})$ в Y; B замкнуто и, очевидно, содержит $f(A)$; мы покажем, что $B=f(A)$, чем и будет доказано наше утверждение. Пусть $y \in B$ и $\mathfrak{V}$ — фильтр окрестностей точки y в Y; по предположению всякое множество из $\mathfrak{W}=\overset{-1}{f}(\mathfrak{V})$ пересекается со всяким множеством из $\mathfrak{F}$; поэтому $\mathfrak{W}$ есть базис фильтра в X и в X существует ультрафильтр $\mathfrak{U}$, мажорирующий и фильтр с базисом $\mathfrak{W}$, и фильтр $\mathfrak{F}$ (§ 6, следствие 2 предложения 1 и теорема 1). Ультрафильтр с базисом $f(\mathfrak{U})$ мажорирует $\mathfrak{V}$ и, следовательно, сходится к y. В силу г) существует такое $x \in X$, что $f(x)=y$ и $\mathfrak{U}$ сходится к x; так как $\mathfrak{U}$ мажорирует $\mathfrak{F}$, то x есть точка

прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$, а значит, $x \in A$, чем и доказано, что $B=f(A)$.

г) *влечет* а): в самом деле, требуется доказать, что если f удовлетворяет условию г), то отображение $f \times \iota_Z$ замкнуто для каждого топологического пространства Z. Согласно предыдущему достаточно доказать, что $f \times \iota_Z$ также удовлетворяет условию г). А это вытекает из следующей общей леммы:

Лемма 2. *Если* $(f_\iota)_{\iota \in I}$ *— семейство непрерывных отображений* f_ι: $X_\iota \to Y_\iota$, *каждое из которых удовлетворяет условию* г), *то и их произведение* f: $(x_\iota) \mapsto (f_\iota(x_\iota))$ *удовлетворяет условию* г).

В самом деле, пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в $X=\prod_\iota X_\iota$ и $y=(y_\iota)$ — точка в $Y=\prod_\iota Y_\iota$, к которой сходится $f(\mathfrak{U})$. Это означает, что каждый из базисов ультрафильтров $\mathrm{pr}_\iota(f(\mathfrak{U}))=f_\iota(\mathrm{pr}_\iota(\mathfrak{U}))$ сходится к y_ι (§ 7, следствие 1 предложения 10). В силу условия г) для каждого $\iota \in I$ существует такое $x_\iota \in X_\iota$, что $f_\iota(x_\iota)=y_\iota$ и $\mathrm{pr}_\iota(\mathfrak{U})$ сходится к x_ι; но тогда $\mathfrak{U}$ сходится к $x=(x_\iota)$ (§ 7, следствие 1 предложения 10) и $f(x)=y$, что доказывает лемму и завершает доказательство теоремы 1.

Следствие 1. *Для того чтобы топологическое пространство* X *было квазикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы отображение* $X \to P$ *было совершенно.*

Вытекает из равносильности а) и б) в применении к отображению $X \to P$.

Следствие 2. *Всякое непрерывное отображение* f *квазикомпактного пространства* X *в отделимое пространство* Y *совершенно.*

Композиция $X \xrightarrow{f} Y \to P$ совершенна (следствие 1), а значит, f совершенно в силу предложения 5г. Можно также применить критерий б) теоремы 1, используя следствие 2 теоремы 2 § 9.

Следствие 3. *Произведение* $(x_\iota) \mapsto (f_\iota(x_\iota))$ *семейства совершенных отображений* (f_ι) *есть совершенное отображение.*

Вследствие теоремы 1 это не что иное, как доказанная выше лемма 2.

Если применить это следствие к семейству отображений $X_\iota \to P$, то, принимая во внимание следствие 1, мы вновь получим теорему Тихонова (§ 9, теорема 3).

Следствие 4. *Пусть X — отделимое пространство. Для каждого семейства совершенных отображений $f_\iota\colon X\to Y_\iota$ отображение $x\mapsto(f_\iota(x))$ пространства X в $\prod_\iota Y_\iota$ совершенно.*

Доказательство такое же, как и в случае конечного семейства (следствие 3 предложения 5), с использованием предыдущего следствия 3 и замкнутости диагонали произведения X^I (§ 8, предложение 1).

Следствие 5. *Для каждого квазикомпактного пространства X и каждого топологического пространства Y проекция $\mathrm{pr}_2\colon X\times Y\to Y$ совершенна.*

В самом деле, Y можно отождествить с $P\times Y$, отождествляя pr_2 с произведением совершенных отображений $X\to P$ (следствие 1) и ι_Y, откуда и вытекает требуемое (следствие 3).

> Пример. Пусть X — множество и $f\colon X\to X'$ — его *сюръективное* отображение в топологическое пространство X'; наделим X прообразом топологии пространства X' относительно f. Тогда f *совершенно*, ибо оно замкнуто (§ 5, п° 1, пример 3), и прообраз любой точки из X' есть подпространство в X, имеющее слабейшую топологию и тем самым квазикомпактное.

Замечание. Если Y *отделимо*, то условие г) теоремы 1 равносильно следующему:

г′) *Если* $\mathfrak{U}$ *— такой ультрафильтр в* X, *что* $f(\mathfrak{U})$ *есть базис сходящегося фильтра*, *то* $\mathfrak{U}$ *сходится.*

В самом деле, если $\mathfrak{U}$ сходится к x, а $f(\mathfrak{U})$ — к y, то из единственности предела в Y и непрерывности f следует, что тогда необходимо $y=f(x)$. Точно так же условие в) теоремы 1 равносильно тогда следующему:

в′) *Если* $\mathfrak{F}$ *— такой фильтр в* X, *что* $f(\mathfrak{F})$ *имеет точку прикосновения, то и* $\mathfrak{F}$ *имеет точку прикосновения.*

В самом деле, в)$\Rightarrow$в′)$\Rightarrow$г′)$\Rightarrow$г)$\Rightarrow$в).

> Напротив, если Y неотделимо, то г′) уже не влечет г), как показывает пример, где X сводится к одной точке, а Y состоит из двух элементов и наделено слабейшей топологией.

Предложение 6. *Если $f\colon X\to Y$ — совершенное отображение и K — квазикомпактное множество в Y, то множество $f^{-1}(K)$ квазикомпактно.*

По предложению 3 отображение f_K: $\overset{-1}{f}(K)\to K$ совершенно; поскольку $K\to P$ — совершенное отображение (следствие 1 теоремы 1), из предложения 5а вытекает, что композиция $\overset{-1}{f}(K)\xrightarrow{f_K} K\to P$ совершенна и, значит, $\overset{-1}{f}(K)$ квазикомпактно (следствие 1 теоремы 1).

3. *Совершенные отображения в локально компактные пространства*

Предложение 7. *Пусть f — непрерывное отображение отделимого пространства X в локально компактное пространство Y. Для того чтобы f было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз $\overset{-1}{f}(K)$ любого компактного множества $K\subset Y$ был компактен. При этом если f совершенно, то X локально компактно.*

Если f совершенно, то $\overset{-1}{f}(K)$ компактно для любого компактного $K\subset Y$ в силу предложения 6. Обратно, предположим, что это условие выполнено, и пусть (U_α) — покрытие пространства Y, образованное относительно компактными открытыми множествами. Из предположения следует, что все $\overset{-1}{f}(\overline{U}_\alpha)$ компактны и их внутренности образуют покрытие пространства X; поскольку X отделимо, это доказывает, прежде всего, его локальную компактность. Кроме того, каждое отображение $f_{\overline{U}_\alpha}$: $\overset{-1}{f}(\overline{U}_\alpha)\to\overline{U}_\alpha$ совершенно (следствие 2 теоремы 1) и, следовательно, f совершенно (предложение 3б).

Следствие. *Пусть X и X' — локально компактные пространства, а Y и Y' — компактные пространства, получаемые путем присоединения к X и X' соответственно бесконечно удаленных точек ω и ω'* (§ 9, n° 8). *Для того чтобы непрерывное отображение f: $X\to X'$ было совершенно, необходимо и достаточно, чтобы его продолжение $\overline{f}$: $Y\to Y'$ такое, что $\overline{f}(\omega)=\omega'$, было непрерывно.*

В самом деле, в силу предложения 7, сказать, что f совершенно, все равно, что сказать, что для любого компактного множества

K' из X' множество $\overline{f}^{-1}(X'-K')=X-\overline{f}^{-1}(K')$ есть дополнение компактного множества в X; а по определению окрестностей точек ω и ω' в Y и Y' (§ 9, теорема 4) это равносильно непрерывности $\overline{f}$ в точке ω, чем утверждение следствия и доказано.

4. *Факторпространства компактных и локально компактных пространств*

Предложение 8. *Пусть X — компактное пространство, R — отношение эквивалентности в X, C — его график в $X\times X$ и f — каноническое отображение $X\to X/R$. Следующие условия равносильны:*

а) *C замкнут в $X\times X$.*

б) *R замкнуто.*

в) *f совершенно.*

г) *X/R отделимо.*

Кроме того, если эти условия выполнены, то X/R компактно.

Сказать, что R замкнуто, все равно, что сказать, что f замкнуто, так что б) влечет в) в силу теоремы 1б. То, что в) влечет г), есть частный случай следствия 2 предложения 5. Как мы уже знаем, г) влечет а) без каких бы то ни было предположений относительно X (§ 8, предложение 8). Докажем теперь, что а) влечет б). Но если F — замкнутое множество в X, то его насыщением служит $\mathrm{pr}_2(C\cap(F\times X))$, и так как в силу предположения $C\cap(F\times X)$ есть замкнутое множество в компактном пространстве $X\times X$ и, значит, компактно (§ 9, предложение 3), то наше утверждение вытекает из непрерывности pr_2 (§ 9, следствие 2 теоремы 2).

Наконец, ясно, что если X/R отделимо, то в силу теоремы 2 § 9 оно компактно.

Предложение 9. *Пусть X — локально компактное пространство, R — отношение эквивалентности в X, C — его график в $X\times X$ и f — каноническое отображение $X\to X/R$; пусть, далее, X' — компактное пространство, получаемое путем присоединения к X бесконечно удаленной точки ω, и R' — отношение*

эквивалентности в X с графиком $C'=C\cup\{(\omega,\omega)\}$. Следующие условия равносильны:

а) *f совершенно.*

б) *Насыщение по R всякого компактного множества в X есть компактное множество.*

в) *R' замкнуто.*

г) *Сужение на C проекции pr_2 совершенно.*

д) *R замкнуто и все классы по R компактны.*

Кроме того, если эти условия выполнены, то X/R локально компактно.

а)$\Rightarrow$б): в самом деле, так как $X/R=f(X)$, то X/R отделимо (следствие 2 предложения 5); следовательно, образ при f всякого компактного множества K из X компактен (§ 9, следствие 1 теоремы 2); а так как насыщением множества K по R служит $\overline{f}^{1}(f(K))$, то оно компактно в силу предложения 6.

б)$\Rightarrow$в): если F' — замкнутое множество в X', не содержащее ω, то F' компактно в X, так что его насыщение по R', совпадающее с насыщением по R, компактно и тем более замкнуто в X'. Если же $\omega\in F'$, то насыщение множества F' по R' есть объединение множества $\{\omega\}$ и насыщения H множества $F=F'\cap X=F'-\{\omega\}$ по R, так что достаточно доказать, что H *замкнуто в* X (т. е. что R есть *замкнутое* отношение). Для этого достаточно показать, что $H\cap K$ компактно при любом компактном множестве K из X (§ 9, предложение 11). Но насыщение L множества K по R компактно по предположению, след же множества H на L есть насыщение множества $F\cap L$, т. е. тоже компактен; тем более будет компактно $H\cap K=(H\cap L)\cap K$.

в) $\Rightarrow$г): в самом деле, так как X' регулярно (§ 9, следствие предложения 1), то C' *замкнуто* в $X'\times X'$ (§ 8, предложение 14) и, значит, компактно. Отсюда заключаем, что C' есть компактификация Александрова пространства C (§ 9, теорема 4); поскольку сужение проекции pr_2: $X'\times X'\to X'$ на C' непрерывно в точке ω, справедливость утверждения вытекает из следствия предложения 7.

г)$\Rightarrow$д): для каждого замкнутого множества F из X пересечение $C\cap(F\times X)$ замкнуто в C, и потому насыщение множества F по R, совпадающее с $\mathrm{pr}_2(C\cap(F\times X))$, замкнуто в X (предложение 1). Кроме того, класс точки $x\in X$ по R гомеоморфен прообразу мно-

жества $\{x\}$ относительно сужения проекции pr_2 на C и, значит, компактен (теорема 1б).

д)$\Rightarrow$а): в самом деле, если R замкнуто, то f замкнуто по определению, а $f^{-1}(z)$ для каждого $z \in X/R$ есть класс по R и, значит, компактно; наше утверждение вытекает тогда из теоремы 1б.

Покажем, наконец, что X/R локально компактно. В самом деле, X'/R' компактно в силу в) и предложения 8; отношение R индуцируется в X отношением R', а X открыто в X' и насыщено по R'; следовательно, X/R гомеоморфно образу $f'(X)$ пространства X при каноническом отображении f': $X' \to X'/R'$ (§ 3, следствие 1 предложения 10). Но $f'(X)$ открыто в X'/R' и потому является его локально компактным подпространством. Тем самым предложение доказано.

Следствие. *Пусть X — отделимое пространство, Y — топологическое пространство, f: $X \to Y$ — совершенное отображение. Для того чтобы X было компактно* (соотв. *локально компактно*), *необходимо и достаточно, чтобы $f(X)$ было компактно* (соотв. *локально компактно*), *и достаточно, чтобы Y было компактно* (соотв. *локально компактно*).

В самом деле, если X компактно (соотв. локально компактно), то компактность (соотв. локальная компактность) $f(X)$ вытекает из следствия 4 предложения 5 и предложений 8 и 9 (в случае, когда X компактно, это вытекает, впрочем, также из следствия 2 предложения 5 и теоремы 2 § 9). Обратно, если $Z = f(X)$ компактно (соотв. локально компактно), то, поскольку f_Z: $X \to f(X)$ совершенно (предложение 3а), X компактно (соотв. локально компактно) в силу предложений 6 и 7. Наконец, если Y компактно (соотв. локально компактно), то то же верно и для $f(X)$, которое замкнуто в Y (предложение 1 и § 9, предложение 13).

Замечание. Если X локально компактно, но не компактно, то *замкнутое* отношение эквивалентности R в X может быть *неотделимым* (гл. IX, 2-е изд., § 4, упражнение 14); и даже когда оно отделимо, X/R не обязательно локально компактно (упражнение 17). Однако справедлив следующий критерий:

Предложение 10 *Пусть X — локально компактное пространство, R* — отделимое *и* открытое *отношение эквивалентности в*

X и f — каноническое отображение $X \to X/R$. Тогда X/R локально компактно и для любого компактного множества K' из X/R существует такое компактное множество K в X, что $f(K)=K'$.

Первое утверждение вытекает из того, что всякая точка $x \in X$ имеет компактную окрестность V и $f(V)$ есть компактная окрестность точки $f(x)$ (§ 5, предложение 5 и § 9, следствие 1 теоремы 2). Пусть $V(y)$ для каждого $y \in K'$ — компактная окрестность какой-либо точки из $f^{-1}(y)$ в X, так что $f(V(y))$ — компактная окрестность точки y. Существует конечное число точек $y_i \in K'$ таких, что $f(V(y_i))$ покрывают K'. Обозначим через K_1 компактное множество $\bigcup_i V(y_i)$ в X; тогда $K' \subset f(K_1)$, следовательно, $K = K_1 \cap f^{-1}(K')$ компактно (ибо оно замкнуто в K_1) и $f(K)=K'$.

Упражнения

1) а) Дать пример непрерывных отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ таких, что $g \circ f$ совершенно, а f не сюръективно и g не совершенно.

б) Дать пример двух совершенных отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Z$, где X, Y, Z — квазикомпактные пространства, таких, чтобы $x \longmapsto (f(x), g(x))$ не было совершенным отображением пространства X в $Y \times Z$.

2) Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение и A — подпространство пространства X. Показать, что если $A = f^{-1}(f(A)) \cap \overline{A}$, то сужение $f|A$ есть совершенное отображение пространства A в $f(A)$. Является ли это условие необходимым?

*3) Пусть $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система квазикомпактных колмогоровских пространств таких, что все $f_{\alpha\beta}$ совершенны. Показать, что если ни одно X_α не пусто, то $\varprojlim X_\alpha$ не пуст. [Показать, что в квазикомпактном колмогоровском пространстве всякое непустое замкнутое множество содержит замкнутое одноточечное множество.]

4) Дать пример непрерывного отображения $f\colon X \to Y$, где X и Y отделимы, которое не было бы совершенным, но для которого прообраз $f^{-1}(K)$ всякого компактного множества K был бы компактен. [См. § 9, упражнение 4.]

*5) Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение.

а) Показать, что если X регулярно, то $f(X)$ есть регулярное подпространство пространства Y.

б) Показать, что если подпространство $f(X)$ пространства Y есть пространство Линделефа (§ 9, упражнение 15), то и X есть пространство Линделефа. [Использовать предложение 10 § 5.]

*6) Пусть X — *сумма* своих подпространств X_ι ($\iota \in I$), f — непрерывное отображение пространства X в топологическое пространство Y и f_ι: $X_\iota \to Y$ для каждого $\iota \in I$ — сужение f на X_ι. Показать, что для того чтобы f было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы каждое f_ι было совершенным, а семейство множеств $f(X_\iota)$ — локально конечным. [Использовать теорему 1г.]

*7) Пусть f: $X \to X'$ — совершенное отображение, а R и R' — отношения эквивалентности в X и X', с которыми f согласуется. Пусть, далее, $\overline{f}$: $X/R \to X'/R'$ — отображение, полученное из f путем факторизации. Предположим, что: 1° образ при f всякого множества, насыщенного по R, насыщен по R'; 2° R' открыто. Показать, что при этих условиях $\overline{f}$ совершенно. [Использовать теорему 1в.]

8) Показать, что при условиях примера 3 п° 2 § 5 каноническое отображение $X \to X/R$ совершенно.

*9) а) Пусть X и Y — топологические пространства, а f: $X \to Y$ — сюръективное замкнутое отображение (не обязательно непрерывное). Показать, что если $f^{-1}(y)$ квазикомпактно для всякого $y \in Y$, то $f^{-1}(K)$ квазикомпактно для любого квазикомпактного множества K из Y. [Рассуждать непосредственно или использовать упражнение 7 § 5 и упражнение 13 § 9.]

б) Предположим, кроме того, что X регулярно. Показать, что если $f^{-1}(y)$ замкнуто в X для любого $y \in Y$, то $f^{-1}(K)$ замкнуто в X для любого квазикомпактного множества K из Y. [Те же методы.] Если, к тому же, Y локально компактно, то f непрерывно.

10) Пусть X и Y — топологические пространства. Соответствие (G, X, Y) между X и Y (Теор. множ. гл. II, § 3, п° 1) называется *совершенным*, если сужение проекции pr_2 на график G есть совершенное отображение $G \to Y$.

а) Пусть f — отображение X в Y; показать, что для непрерывности f необходимо и достаточно, чтобы соответствие f^{-1} между Y и X было совершенным. Для того чтобы f было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы соответствия f^{-1} (между Y и X) и f (между X и Y) были совершенными. Получить отсюда пример не непрерывного отображения f, для которого бы соответствие f было совершенным.

б) Показать, что если (G, X, Y) — совершенное соответствие, то $G(A)$ есть замкнутое множество в Y для любого замкнутого множества A из X.

*11) Пусть (G, X, Y) — совершенное соответствие (упражнение 10).

а) Показать, что если $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в X, образованный *замкнутыми* множествами, то $\bigcap_{M \in \mathfrak{B}} G(M) = G\left(\bigcap_{M \in \mathfrak{B}} M\right)$.

б) Показать, что для любого $y \in Y$ и любой окрестности V множества $G^{-1}(y)$ в X существует такая окрестность W точки y в Y, что $G^{-1}(W) \subset V$ («непрерывная зависимость корней от параметров»). [Использовать упражнение 6 § 9.]

*12) а) Для того чтобы соответствие (G, X, Y) было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы для любого топологического пространства Z и любого соответствия (E, Z, X) с замкнутым графиком E в $Z \times X$ график $G \circ E$ был замкнут в $Z \times Y$. [Чтобы убедиться в необходимости условия, заметить, что $G \circ E$ есть образ $(E \times Y) \cap (Z \times G)$ при отображении $\iota_Z \times \mathrm{pr}_2 : Z \times G \to Z \times Y$. Чтобы убедиться в достаточности, показать, что для любого $F \subset (Z \times Y) \times X$ прообраз $G \circ F$ относительно отображения $\iota_Z \times \delta_Y$: $Z \times Y \to Z \times Y \times Y$, где δ_Y — диагональное отображение $Y \to Y \times Y$, есть образ множества $\mathrm{pr}_{23}(F^{-1} \cap (G \times Z))$ при отображении $(y, z) \mapsto (z, y)$, где F^{-1} означает образ F при отображении $(z, y, x) \mapsto (x, y, z)$.]

б) Вывести из а), что композиция двух совершенных соответствий есть совершенное соответствие.

в) Пусть (G, X, Y) — совершенное соответствие. Показать, что если X отделимо, то G замкнуто в $X \times Y$.

*13) Пусть X — локально компактное пространство и Y — топологическое пространство.

а) Доказать равносильность следующих условий:

α) (G, X, Y) есть совершенное соответствие между X и Y.

β) Для любого отделимого пространства X', содержащего X как подпространство, G замкнуто в $X' \times Y$.

γ) G замкнуто в $X \times Y$ и для любого $y \in Y$ существуют окрестность V точки y в Y и компактное множество K в X такие, что $(X - K) \times V$ не пересекается с G.

δ) Существует такое компактное пространство X', содержащее X как подпространство, что G замкнуто в $X' \times Y$.

[Для доказательства того, что α) влечет β), использовать упражнения 12а и в. Для доказательства того, что δ) влечет α), использовать предложение 2 и следствие 5 теоремы 1.]

б) Показать, что если (G, X, Y) совершенно, то выполняется следующее условие:

ζ) $G^{-1}(L)$ компактно для любого компактного множества L из Y.

Доказать, кроме того, что если Y локально компактно, а G замкнуто в $X \times Y$ и удовлетворяет условию ζ), то (G, X, Y) совершенно. [Использовать равносильность α) и γ).] Это последнее утверждение теряет силу, если Y отделимо, но уже не предполагается локально компактным [упражнение 4].

14) Пусть Y — локально компактное пространство и X — топологическое пространство. Для непрерывности отображения $f: X \to Y$

необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного пространства Y', содержащего Y как подпространство, график f был замкнут в $X \times Y'$. [Использовать упражнения 13 и 10а.]

15) Пусть X — отделимое пространство, A — замкнутое множество в X, f — совершенное отображение пространства $X - A$ в локально компактное пространство Y, Y' — компактификация Александрова пространства Y и ω — ее бесконечно удаленная точка. Пусть, далее, g — отображение X в Y', равное f на $X - A$ и равное ω на A. Доказать, что g непрерывно.

*16) Пусть X — локально компактное пространство, R — отношение эквивалентности в X и C — его график в $X \times X$. Показать, что для замкнутости C в $X \times X$ необходимо и достаточно, чтобы насыщение по R любого компактного множества K в X было замкнуто в X. [Для доказательства необходимости использовать следствие 5 теоремы 1.]

°17) Пусть S — отношение эквивалентности в локально компактном пространстве $\mathbf{R}$, получаемое отождествлением между собой всех точек из $\mathbf{Z}$. Показать, что S замкнуто, а $\mathbf{R}/S$ отделимо, но не локально компактно.$_\circ$

°18) Пусть X — локально компактное подпространство $[0, +\infty[$ пространства $\mathbf{R}$ и S — отношение эквивалентности в X, имеющее своими классами множества $\left\{x, \frac{1}{x}\right\}$ $(0<x\leqslant 1)$ и $\{0\}$. Показать, что S открыто, имеет замкнутый график в $X \times X$ и X/S компактно, но S не замкнуто.$_\circ$

*19) Пусть X — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, и R — отношение эквивалентности в X с замкнутым графиком в $X \times X$. Показать, что X/R отделимо. [Пусть (U_n) — покрытие пространства X, состоящее из относительно компактных открытых множеств, для которых $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$. Пусть, далее, A и B — непересекающиеся замкнутые множества, насыщенные по R. Определить по индукции две возрастающие последовательности (V_n) и (W_n) насыщенных по R замкнутых множеств, таких, что $V_n \cap W_n = \varnothing$, а $V_n \cap \overline{U}_n$ (соотв. $W_n \cap \overline{U}_n$) — окрестность множества $A \cap \overline{U}_n$ (соотв. $B \cap \overline{U}_n$) в компактном подпространстве $\overline{U}_n$. Использовать предложение 8 и упражнение 16, а также предложение 2 § 9.] *)

*20) Пусть X — непустое компактное пространство и R — отделимое отношение эквивалентности в X. Для того чтобы X/R было замкнутым в пространстве $\mathfrak{P}_0(X)$, наделенном топологией $\mathscr{T}_\Theta$ (§ 8, упражнение 12), необходимо и достаточно, чтобы отношение R было открытым. [Использовать упражнение 14 § 9 и упражнение 16 § 3

*) Если локально компактное пространство X не счетно в бесконечности, то может случиться, что отношение эквивалентности R в X замкнуто (и тем более имеет замкнутый график (§ 8, предложение 14)), но X/R неотделимо (см. гл. IX, 2-е изд., § 4, упражнения 9б и 14).

для доказательства того, что если X/R замкнуто в $\mathfrak{P}_0(X)$, наделенном топологией $\mathscr{T}_\Theta$, то фактортопология в X/R совпадает с топологией, которую индуцирует $\mathscr{T}_\Theta$, и применить упражнение 7 § 5. Обратно, если R открыто, использовать упражнение 29 § 8 для доказательства замкнутости X/R в топологии $\mathscr{T}_\Theta$.]

*21) *) а) Пусть X — достижимое *локально квазикомпактное* пространство (§ 9, упражнение 30), X_0 — дискретное пространство, имеющее носителем то же множество, что и X, и $\tilde{X}_0$ — (компактное) пространство всех ультрафильтров в X_0 (где дискретное пространство X_0 отождествлено с открытым подпространством пространства $\tilde{X}_0$) (§ 9, упражнение 27). Пусть, далее, R (или $R(X)$) — отношение эквивалентности в $\tilde{X}_0$ между ультрафильтрами $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$: «$\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ имеют в X одно и то же множество пределов». Показать, что отношение R *отделимо* [использовать описание топологии пространства $\tilde{X}_0$, данное в упражнении 26б § 9, упражнение 7б § 7 и аксиому (C′)]; компактное пространство $X^c = \tilde{X}_0/R$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех *примитивных* множеств из X (§ 7, упражнение 7). Если X отделимо (и, следовательно, локально компактно), то X^c отождествимо с X, если X компактно, и с его компактификацией Александрова, если оно не компактно.

б) Пусть $Y \overset{\sim}{=} \subset$ замкнутое подпространство пространства X. Пространство $\tilde{Y}_0$ всех ультрафильтров в Y_0 отождествимо с замыканием Y_0 в $\tilde{X}_0$, а пространство Y^c — с каноническим образом $\tilde{Y}_0$ в X^c.

в) Показать, что сужение на X_0 канонического отображения $\tilde{X}_0 \to X^c$ есть биекция X_0 на некоторое подпространство X^c_* пространства X^c, что каноническое отображение $f\colon X^c_* \to X$ есть непрерывная биекция и что образ при этом отображении всякого компактного множества из X^c_* есть замкнутое компактное множество в X. [Чтобы убедиться в непрерывности f, использовать б); заметить, с другой стороны, что прообраз в $\tilde{X}_0$ точки из X^c_* состоит из ультрафильтров в X, имеющих каждый единственный предел, и что если $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в X, то предел $\mathfrak{U}$, рассматриваемого как базис ультрафильтра в $\tilde{X}_0$, есть $\mathfrak{U}$, рассматриваемое как *точка* в $\tilde{X}_0$.]

°г) Пусть Z — множество-сумма не более чем счетного семейства пространств Y_n, совпадающих с пространством Y, определенным в упражнении 7 § 8, и одноточечного множества $\{\omega\}$. Определим в Z топологию, приняв за фундаментальную систему окрестностей точки $z \in Y_n$ фильтр ее окрестностей в пространстве Y_n, а за фундаментальную систему окрестностей точки ω множество всех V_n, где V_n есть объеди-

*) Результаты (неопубликованные) этого упражнения и упражнения 7 § 7 сообщил нам J. Fell.

нение $\{\omega\}$ и всех Y_m с $m \geqslant n$. Так определенное пространство Z достижимо, квазикомпактно и локально квазикомпактно; но подпространство Z_*^c пространства Z^c не локально компактно.$_\circ$

д) Пусть Y — еще одно достижимое локально квазикомпактное пространство и u — такое непрерывное отображение пространства X в Y, что прообраз относительно u всякого квазикомпактного множества из Y квазикомпактен. Показать, что u, рассматриваемое как отображение пространства X_*^c в Y_*^c, непрерывно и продолжается (единственным образом) до непрерывного отображения $X^c \to Y^c$. [Продолжить сначала u до непрерывного отображения $\tilde{X}_0$ в $\tilde{Y}_0$ и показать, что оно согласуется с отношениями эквивалентности $R(X)$ и $R(Y)$.]

°е) Пусть X — достижимое квазикомпактное, но не локально квазикомпактное пространство, определенное в упражнении 30в § 9. Показать, что в соответствующем пространстве $\tilde{X}_0$ отношение эквивалентности $R(X)$ неотделимо.$_\circ$

§ 11. Связность

1. *Связные пространства и множества*

Определение 1. *Топологическое пространство X называют связным, если оно не является объединением двух непересекающихся непустых открытых множеств.*

Равносильное определение получим, заменив слово «открытых» на «замкнутых»; то же самое можно выразить, сказав, что кроме всего X и пустого множества в X нет *открыто-замкнутых* множеств.

Если X связно, A и B — непустые открытые (или замкнутые) множества такие, что $A \cup B = X$, то $A \cap B \neq \varnothing$.

Примеры. °1) В гл. IV, § 2, n° 5 мы увидим, что числовая прямая связна, а рациональная прямая не связна.$_\circ$

2) Дискретное пространство, содержащее более одной точки, не связно.

Заметим, что если $(U_\iota)_{\iota \in I}$ — *разбиение* топологического пространства X, образованное *открытыми* множествами (которые необходимо *не пусты* в силу определения разбиения (Теор. множ., Сводка результ., § 4, n° 4), то каждое U_ι *открыто-замкнуто*, ибо его дополнение открыто, будучи объединением всех $U_\varkappa$, у которых

$\varkappa \neq \iota$. Открытыми множествами в X будут тогда те и только те множества A, для которых $A \cap U_\iota$ открыто в U_ι при всех $\iota \in I$; поэтому пространство X отождествимо с *суммой* пространств U_ι (§ 2, n° 4, пример III) и, если I содержит по крайней мере два элемента, не связно.

Определение 2. *Подмножество A топологического пространства X называют связным, если оно есть связное подпространство пространства X.*

Для того чтобы множество $A \subset X$ было связным, необходимо и достаточно, чтобы для любого его покрытия, состоящего из двух открытых (или двух замкнутых) множеств B и C таких, что $A \cap B$ и $A \cap C$ не пусты, множество $A \cap B \cap C$ было не пусто.

Примеры. В любом топологическом пространстве пустое множество и одноточечные множества связны; в *отделимом* пространстве всякое *конечное* множество, содержащее более одной точки, и вообще всякое неодноточечное множество, обладающее по крайней мере одной *изолированной* точкой, не связно.

Если *всюду плотное* множество A связно, то и все пространство X связно: в противном случае существовали бы непересекающиеся непустые открытые множества M и N такие, что $X = M \cup N$; тогда $M \cap A$ и $N \cap A$ были бы непересекающимися непустыми открытыми множествами в A, имеющими A своим объединением, в противоречие с предположением. Итак, имеем:

Предложение 1. *Если A — связное множество, то связно и всякое множество B такое, что $A \subset B \subset \bar{A}$.*

Предложение 2. *Объединение семейства связных множеств, имеющего непустое пересечение, есть связное множество.*

Пусть $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство связных множеств в X, имеющих общую точку x; покажем, что $A = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ связно. Действительно, в противном случае в X существуют открытые множества B и C такие, что $B \cap A$ и $C \cap A$ не пусты, $A \subset B \cup C$ и $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. Точка x принадлежит одному из множеств B, C, пусть, например, $x \in B$;

с другой стороны, существует такой индекс $\varkappa$, что $C \cap A_\varkappa \neq \varnothing$; но тогда $A_\varkappa \subset B \cup C$, $A_\varkappa \cap B \cap C = \varnothing$, причем $B \cap A_\varkappa$ и $C \cap A_\varkappa$ не пусты, в противоречие с предположением, что все A_ι связны.

Следствие. *Пусть* $(A_n)_{n \geqslant 0}$ — *бесконечная последовательность связных множеств таких, что* $A_{n+1} \cap A_n \neq \varnothing$ *при любом* $n \geqslant 0$; *тогда объединение* $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ *связно.*

В самом деле, индукцией по n сразу убеждаемся на основании предложения 2, что множество $B_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ связно при любом n; поскольку же множества B_n имеют непустое пересечение, их объединение, равное $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, связно по предложению 2.

Предложение 3. *Пусть* A — *произвольное множество в топологическом пространстве* X. *Если* B — *связное множество в* X, *пересекающееся и с* A *и с* $\complement A$, *то* B *пересекается также с границей множества* A.

В самом деле, в противном случае пересечения B с внутренностью и внешностью множества A были бы двумя открытыми множествами в B, образующими его разбиение, в противоречие с предположением.

Следствие. *В связном пространстве* X *всякое непустое отличное от* X *множество имеет по крайней мере одну граничную точку.*

2. *Образ связного множества при непрерывном отображении*

Предложение 4. *Пусть* A — *связное множество в топологическом пространстве* X *и* f — *непрерывное отображение пространства* X *в топологическое пространство* X'; *тогда* $f(A)$ *связно.*

В самом деле, если бы в $f(A)$ существовали открытые (относительно $f(A)$) множества M' и N', образующие его разбиение, то

множества $A \cap f^{-1}(M')$ и $A \cap f^{-1}(N')$ были бы открыты относительно A и образовывали его разбиение, в противоречие с предположением.

Прообраз связного множества относительно непрерывного отображения не обязательно связен, как показывает пример отображения неодноточечного дискретного пространства в одноточечное пространство.

Предложение 4 позволяет по-новому охарактеризовать *несвязные* пространства.

Предложение 5. *Для того чтобы топологическое пространство X было несвязным, необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное* сюръективное *отображение его в дискретное пространство, содержащее более одной точки*

Условие, очевидно, достаточно (предложение 4). Оно необходимо, ибо если A и B — открытые множества, образующие разбиение пространства X, то мы получим непрерывное отображение f этого пространства на дискретное пространство $\{a, b\}$, состоящее из двух элементов, положив $f(A)=\{a\}$ и $f(B)=\{b\}$.

3. *Факторпространства связного пространства*

Предложение 6. *Всякое факторпространство связного пространства связно.*

Это — непосредственное следствие предложения 4.

Предложение 7. *Пусть X — топологическое пространство и R — отношение эквивалентности в X. Если факторпространство X/R связно и все классы эквивалентности по R связны, то X связно.*

Рассуждая от противного, предположим, что существует разбиение пространства X на два открытых множества A и B. Эти множества *насыщены* по R, ибо если $x \in A$, то класс M точки x по R не может пересекаться с B, поскольку тогда множества $A \cap M$ и $B \cap M$ образовывали бы разбиение M на два открытых относительно M множества, что противоречит предположению. Канонические образы множеств A и B будут тогда открытыми подмножествами факторпространства X/R, образующими его разбиение, что невозможно.

4. Произведение связных пространств

Предложение 8. *Всякое произведение связных пространств связно. Обратно, если произведение непустых пространств связно, то каждое из пространств-сомножителей связно.*

Пусть $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$ — произведение топологических пространств. Если X_ι не пусты, то $X_\iota=\mathrm{pr}_\iota X$ для каждого $\iota\in I$, так что если X связно, то и каждое X_ι связно (предложение 4). Обратно, предположим, что все X_ι связны, но X не связно. В силу предложения 5, тогда существует сюръективное непрерывное отображение $f\colon X\to X'$, где X' — дискретное пространство, содержащее более одной точки. Пусть $a=(a_\iota)$ — какая-либо точка из X и $\varkappa$ — произвольный индекс; частичное отображение $f_\varkappa\colon X_\varkappa\to X'$, определенное равенством $f_\varkappa(x)=f((y_\iota))$, где $y_\varkappa=x$ и $y_\iota=a_\iota$ для $\iota\neq\varkappa$, непрерывно на $X_\varkappa$, и так как $X_\varkappa$ связно, то $f_\varkappa$ *постоянно* на $X_\varkappa$. Отсюда по индукции сразу следует, что $f(x)=f(a)$ для любой точки $x=(x_\iota)$ такой, что $x_\iota=a_\iota$ при всех ι, кроме конечного их числа. Но такие точки образуют *всюду плотное* множество в X (§ 4, предложение 8); а так как f непрерывно на X и постоянно на всюду плотном множестве в X, то f будет постоянным на всем X (§ 8, следствие 1 предложения 2), в противоречие с предположением.

5. Связные компоненты

Пусть x — точка топологического пространства X; объединение всех связных множеств из X, содержащих x, есть связное множество (предложение 2); таким образом, это — *наибольшее связное множество* в X, содержащее x.

Определение 3. *Связной компонентой точки пространства X называют наибольшее связное множество в X, содержащее эту точку. Связными компонентами множества $A\subset X$ называют связные компоненты его точек относительно подпространства A пространства X.*

Если пространство связно, то оно совпадает со связной компонентой каждой своей точки. Если для *любой* пары точек (x, y) топологического пространства X существует *связное множество, содержащее x и y*, то X *связно*.

Пространство X называют *вполне несвязным*, если связная компонента каждой его точки состоит из одной этой точки. Множество $A \subset X$ называют *вполне несвязным*, если вполне несвязно подпространство A пространства X.

Дискретное пространство вполне несвязно, но следует остерегаться смешивать эти два понятия: так, например, мы увидим в гл. IV (§ 2, n° 5), что рациональная прямая, которая не является дискретным пространством, вполне несвязна.

Заметим еще, что *открыто-замкнутое* множество содержит связную компоненту каждой своей точки; другими словами, *связная компонента точки содержится в пересечении открыто-замкнутых множеств, содержащих эту точку*. Но она не совпадает, вообще говоря, с этим пересечением (см. упражнение 9 и главу II, § 4, предложение 6).

Предложение 9. *В топологическом пространстве X связная компонента любой точки есть замкнутое множество. Отношение «y принадлежит связной компоненте точки x» есть отношение эквивалентности $R\{x, y\}$ в X, классами эквивалентности которого служат всевозможные связные компоненты в X; факторпространство X/R вполне несвязно.*

Первая часть предложения вытекает непосредственно из определения 3 и того, что замыкание связного множества связно (предложение 1). Так как объединение связных множеств, имеющих общую точку, связно (предложение 2), то отношение R транзитивно и потому является отношением эквивалентности (поскольку оно очевидным образом рефлексивно и симметрично); классом эквивалентности точки x по R будет связная компонента этой точки. Остается убедиться в том, что X/R вполне несвязно. Пусть f — каноническое отображение $X \to X/R$ и F — замкнутое множество в X/R, содержащее по крайней мере *две различные точки*; его прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X, насыщен по R и содержит по крайней мере две различные связные компоненты из X, а значит, *не связен*. Следовательно, в X существуют два непустых замкнутых множества B и C таких, что $B \cap C = \varnothing$ и $B \cup C = f^{-1}(F)$. Так как

связная компонента в $f^{-1}(F)$ какой-либо точки этого множества совпадает со связной компонентой этой точки в X (по определению R), то B и C, которые открыто-замкнуты в $f^{-1}(F)$, насыщены по R; таким образом, $f(B)$ и $f(C)$ замкнуты в X/R и $f(B) \cup f(C) = F$, $f(B) \cap f(C) = \varnothing$; а этим доказано, что F *несвязно* и, следовательно, X/R вполне несвязно.

Предложение 10. *В произведении* $X = \prod_\iota X_\iota$ *связная компонента точки* $x = (x_\iota)$ *есть произведение связных компонент точек* x_ι *в пространствах-сомножителях* X_ι.

В самом деле, произведение этих множеств связно (предложение 8). С другой стороны, если связное множество A из X содержит x, то $\mathrm{pr}_\iota(A)$ есть связное множество (предложение 4), содержащее x_ι; так как $A \subset \prod_\iota \mathrm{pr}_\iota(A)$, то A содержится в произведении связных компонент точек x_ι.

6. *Локально связные пространства*

Определение 4. *Топологическое пространство* X *называют локально связным, если всякая его точка обладает* фундаментальной системой *связных окрестностей.*

°В гл. IV (§ 2, n° 5) мы увидим, что числовая прямая есть локально связное пространство.°

Существование у каждой точки $x \in X$ хотя бы *одной* связной окрестности ни в коей мере не влечет локальной связности X. В частности, X может быть *связным*, но *не локально связным* (упражнения 2 и 13). Обратно, пространство может быть локально связным, но не связным: примером является дискретное пространство, имеющее более одной точки.

Предложение 11. *Для того чтобы пространство* X *было локально связным, необходимо и достаточно, чтобы всякая связная компонента открытого множества в* X *была открытым множеством в* X.

Условие, очевидно, *достаточно*, ибо связная компонента точки x относительно ее открытой окрестности в X будет тогда окрестностью точки x в X.

Условие *необходимо*; в самом деле, пусть A — открытое множество в локально связном пространстве X, B — связная компонента множества A и x — точка из B. Пусть V — связная окрестность точки x, содержащаяся в A; по определению связных компонент (определение 3), V содержится в B, чем и доказано, что B открыто в X (§ 1, предложение 1).

Связные компоненты локально связного пространства X образуют, таким образом, разбиение X, состоящее из *открытых* множеств; поэтому X есть *сумма* (§ 2, n° 4, пример III) своих связных компонент (n° 1).

Следствие. *Пусть U — открытое множество в локально связном пространстве X; граница (относительно X) всякой связной компоненты V множества U содержится в границе множества U.*

В самом деле, в силу предыдущего замечания множество V открыто-замкнуто в U; следовательно, его граничная (относительно X) точка не может принадлежать U.

Предложение 12. *Всякое факторпространство локально связного пространства локально связно.*

Пусть X — локально связное пространство, R — отношение эквивалентности в X, φ — каноническое отображение $X \to X/R$, A — открытое множество в X/R и C — связная компонента множества A; покажем, что $\overset{-1}{\varphi}(C)$ есть объединение некоторых связных компонент множества $\overset{-1}{\varphi}(A)$. В самом деле, если $x \in \overset{-1}{\varphi}(C)$ и K — связная компонента точки x относительно $\overset{-1}{\varphi}(A)$, то $\varphi(K)$ связно (предложение 4), содержится в A и содержит $\varphi(x)$; таким образом, по определению $\varphi(K) \subset C$ и, следовательно, $K \subset \overset{-1}{\varphi}(C)$. Так как X локально связно, а $\overset{-1}{\varphi}(A)$ открыто в X, то $\overset{-1}{\varphi}(C)$ открыто в X (предложение 11) и, значит, C открыто в X/R, чем, в силу предложения 11, доказательство и завершается.

Предложение 13. а) *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство локально связных пространств, в котором X_ι связно для всех кроме конечного числа индексов ι. Тогда пространство $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ локально связно.*

б) *Обратно, если произведение семейства* (X_ι) *непустых топологических пространств локально связно, то* X_ι *для всех индексов локально связны и для всех кроме конечного числа индексов связны.*

а) Пусть J — конечное множество тех индексов из I, для которых X_ι не связно. Пусть, далее, $U=\prod_\iota U_\iota$ — элементарное множество, содержащее точку $x=(x_\iota)$ из X, и K — конечное множество тех индексов из I, для которых $U_\iota \neq X_\iota$. Положим $V_\iota=X_\iota$ для $\iota \notin J \cup K$ и примем за V_ι связную окрестность точки x_ι, содержащуюся в U_ι, для $\iota \in J \cup K$. В силу предложения 8, $V=\prod_\iota V_\iota$ будет содержащейся в U связной окрестностью точки x, чем утверждение а) доказано.

б) Пусть $a=(a_\iota)$ — точка из X и V — ее связная окрестность в X; так как для всех ι, за исключением конечного числа, $\mathrm{pr}_\iota V=X_\iota$ (§ 4, n° 1), то из предложения 4 следует, что X_ι для всех, кроме конечного числа, индексов связны. С другой стороны, для каждого $\varkappa \in I$, каждой точки $a_\varkappa \in X_\varkappa$ и любой ее окрестности $V_\varkappa$ в $X_\varkappa$ существует такая точка $x \in X$, что $\mathrm{pr}_\varkappa x=a_\varkappa$ и $V=V_\varkappa \times \prod_{\iota \neq \varkappa} X_\iota$ есть ее окрестность; следовательно, V содержит связную окрестность W точки x, а проекция этой окрестности $\mathrm{pr}_\varkappa W$ есть связная окрестность точки $a_\varkappa$, содержащаяся в $V_\varkappa$ (предложение 4 и § 4, предложение 5), чем и показано, что $X_\varkappa$ локально связно.

7. *Применение: теорема Пуанкаре—Вольтерра*

Теорема 1. *Пусть* X *— топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме* (O_{III}) *(но не обязательно отделимое), связное и локально связное. Пусть* Y *— топологическое пространство, топология которого обладает* счетным *базисом, и* p: $X \to Y$ *— непрерывное отображение, для которого* $p^{-1}(y)$ *при любом* $y \in Y$ *есть дискретное подпространство пространства* X. *Пусть, наконец,* $\mathfrak{V}$ *— множество подмножеств пространства* X, *внутренности которых образуют покрытие* X, *причем выполнены еще следующие условия:*

1° *Сужение* p *на любое* $V \in \mathfrak{V}$ *есть замкнутое отображение* V *в* Y.

2° *Всякое множество* $V \in \mathfrak{V}$ *содержит* счетное *всюду плотное в* V *подмножество,*

Тогда пространство X является объединением счетного *семейства открытых множеств, каждое из которых содержится в некотором множестве из* $\mathfrak{V}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — счетный базис топологии пространства Y. Будем называть пару (W, U) *выделенной*, если: 1° $U \in \mathfrak{B}$ и 2° W есть связная компонента множества $p^{-1}(U)$, содержащаяся в некотором множестве из $\mathfrak{V}$.

Лемма 1. *Для любой точки $x \in X$ существует такая выделенная пара (W, U), что $x \in W$.*

В самом деле, поскольку прообраз $p^{-1}(p(x))$ дискретен, в X существует окрестность точки x, у всех точек $x' \neq x$ которой образ $p(x') \neq p(x)$; так как X удовлетворяет аксиоме (O_{III}), то существует *замкнутая* окрестность V точки x с тем же свойством, и, очевидно, можно предположить, кроме того, что V содержится в некотором множестве из $\mathfrak{V}$. Пусть F — граница множества V в X; в силу условия 1° теоремы, ее образ $p(F)$ замкнут в Y, и так как $p(F)$ не содержит $p(x)$, то существует множество $U \in \mathfrak{B}$, содержащее $p(x)$ и не пересекающееся с $p(F)$. Пусть тогда W означает связную компоненту множества $p^{-1}(U)$, содержащую x. Достаточно доказать, что $W \subset \mathring{V}$; но в противном случае W пересекалось бы с F (предложение 3), а следовательно, $p(F)$ пересекалось бы с U, что противоречит определению U.

Лемма 2. *Пусть дана выделенная пара (W, U); множество тех выделенных пар (W', U'), для которых $W \cap W' \neq \varnothing$, счетно.*

В самом деле, поскольку $\mathfrak{B}$ счетно, достаточно доказать, что для данного $U' \in \mathfrak{B}$ множество всех выделенных пар (W', U'), в которых W' пересекается с W, счетно. Но эти множества W' открыты, поскольку X локально связно (предложение 11), и попарно не пересекаются, по определению связных компонент множества $p^{-1}(U')$; то же верно и для множеств $W' \cap \mathring{W}$. Но так как W содержит счетное подмножество, плотное в W, то множество тех W', для которых $W' \cap W$ не пусто, необходимо счетно.

После этих лемм рассмотрим в X следующее отношение R между точками x и x':

«существует конечная последовательность выделенных пар (W_i, U_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ такая, что $x \in W_1$, $x' \in W_n$ и $W_i \cap W_{i+1} \neq \varnothing$, когда $1 \leqslant i \leqslant n-1$».

В силу леммы 1 отношение R рефлексивно; непосредственно проверяется, что оно симметрично и транзитивно; кроме того, из определения R и открытости всех W_i вытекает, что всякий класс эквивалентности по R есть открытое множество; так как X связно, то заключаем, что любые две точки из X эквивалентны mod R (n° 1). Выведем отсюда, что X есть объединение *счетного* семейства первых элементов выделенных пар, чем доказательство теоремы 1 и будет завершено. Итак, пусть x — точка из X; определим индукцией по n последовательность (C_n) открытых множеств из X следующим образом: в силу леммы 1 существует такая выделенная пара (W_1, U_1), что $x \in W_1$; положим $C_1 = W_1$; затем для $n > 1$ обозначим через C_n объединение всех первых элементов W тех выделенных пар (W, U), для которых W пересекается с C_{n-1}. Индукцией по n и применением леммы 2 сразу убеждаемся, что C_n есть объединение *счетного* множества первых элементов выделенных пар. Покажем, наконец, что всякая точка $x' \in X$ принадлежит какому-либо из C_n; действительно, существует такая конечная последовательность $(W'_i, U'_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ выделенных пар, что $x \in W'_1$, $x' \in W'_m$ и $W'_i \cap W'_{i+1} \neq \varnothing$, когда $1 \leqslant i \leqslant m-1$; индукцией по i убеждаемся, что $W'_i \subset C_{i+1}$ для каждого i, и, следовательно, $x' \in C_{m+1}$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть Y — регулярное пространство, топология которого обладает счетным базисом*). Пусть, далее, X — связное локально связное пространство и p: $X \to Y$ — непрерывное отображение, обладающее следующим свойством: у каждой точки $x \in X$ существует такая* замкнутая *окрестность V в X, что сужение p на V есть гомеоморфизм V на замкнутое подпространство пространства Y. Тогда X — регулярное пространство, топология которого обладает счетным базисом.*

Прежде всего из предположений вытекает, что X регулярно (§ 8, предложение 13). Покажем, что предположения теоремы 1 будут выполнены, если взять за $\mathfrak{V}$ множество тех замкнутых

---

*) °Можно доказать, что эти условия влекут *метризуемость* топологии пространства Y (гл. IX, 2-е изд., § 4, упражнение 22).°

подмножеств V пространства X, для которых сужение p на V является гомеоморфизмом V на замкнутое подпространство пространства Y. По условию внутренности множеств из $\mathfrak{V}$ покрывают X, и в силу предположения относительно Y всякое $V \in \mathfrak{V}$ обладает счетным базисом и, значит, содержит всюду плотное счетное множество (§ 1, предложение 6). Остается убедиться, что для любого $y \in Y$ подпространство $p^{-1}(y)$ пространства X дискретно; но, по предположению, для каждого $x \in p^{-1}(y)$ существует окрестность $V \in \mathfrak{V}$ точки x в X, не содержащая ни одной точки из $p^{-1}(y)$, отличной от x, откуда и следует наше утверждение. Теорема 1 показывает теперь, что X есть объединение счетного семейства $(T_n)_{n \geqslant 0}$ открытых множеств, где каждое из подпространств T_n имеет счетный базис $(U_{mn})_{m \geqslant 0}$. Но тогда множества U_{mn} $(m \geqslant 0,\ n \geqslant 0)$ образуют базис топологии пространства X (§ 3, n° 1, замечание).

Следствие 2. *Пусть X — локально компактное, связное и локально связное пространство, каждая точка которого имеет окрестность, обладающую счетным базисом. Пусть, далее, Y — отделимое пространство, топология которого обладает счетным базисом, и p: $X \to Y$ — непрерывное отображение, для которого $p^{-1}(y)$ есть дискретное подпространство в X при любом $y \in Y$. Тогда топология пространства X обладает счетным базисом.*

Пусть V_x для каждого $x \in X$ — компактная окрестность точки x в X, обладающая счетным базисом; из следствия 2 теоремы 2 § 9 вытекает, что множество $\mathfrak{V}$ всех V_x удовлетворяет условиям теоремы 1; далее рассуждаем, как в заключительной части доказательства следствия 1.

Заметим, что в этом втором следствии сужение отображения p на произвольно малую окрестность V точки из X может и *не быть гомеоморфизмом V на $p(V)$*.

Следствие 3 (теорема Пуанкаре — Вольтерра). *Пусть Y — локально компактное, локально связное пространство, топология которого обладает счетным базисом, X — связное отделимое пространство и p: $X \to Y$ — непрерывное отображение, обладающее следующим свойством: каждая точка $x \in X$ имеет такую открытую*

окрестность U, что сужение p на U есть гомеоморфизм U на открытое подпространство пространства Y. Тогда X локально компактно, локально связно и его топология обладает счетным базисом.

Очевидно, X локально связно; с другой стороны, всякая точка $x \in X$ обладает такой открытой окрестностью U в X, что сужение p на U есть гомеоморфизм U на открытое подпространство $p(U)$ пространства Y. Так как $p(U)$ — локально компактное подпространство в Y (§ 9, предложение 13), то существует компактная окрестность W точки $p(x)$, содержащаяся в $p(U)$, и, значит, $U \cap \overset{-1}{p}(W)$ будет компактной окрестностью точки x, содержащейся в U. Поэтому X, будучи отделимым, локально компактно; кроме того, $U \cap \overset{-1}{p}(W)$, будучи компактным, замкнуто в X (§ 9, предложение 4), и тем самым все предположения следствия 1 удовлетворены; следовательно, топология пространства X обладает счетным базисом.

Упражнения

1) Показать, что счетное отделимое пространство, определенное в упражнении 21в § 9, связно.

2) а) Пусть X — топологическое пространство и $\mathscr{T}$ — его топология. Показать, что если X, наделенное полурегулярной топологией $\mathscr{T}^*$, ассоциированной с $\mathscr{T}$ (§ 8, упражнение 20), связно, то X связно в топологии $\mathscr{T}$. Вывести отсюда существование субмаксимальных связных пространств (§ 8, упражнение 22).

°б) Определить, в частности, в $\mathbf{R}$ топологию, мажорирующую обычную топологию и такую, чтобы $\mathbf{R}$ было в ней связно, но ни одна его точка не обладала фундаментальной системой связных окрестностей [см. гл. IV, 3-е изд., § 2, упражнение 14в].

3) Пусть A и B — подмножества топологического пространства X.

а) Показать, что если A и B замкнуты в X, а $A \cup B$ и $A \cap B$ связны, то A и B связны. Показать на примере, что это утверждение может быть уже неверным, когда одно из множеств A, B не замкнуто.

б) Пусть A и B связны и $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$; показать, что $A \cup B$ связно.

*4) Пусть X — связное пространство, имеющее по крайней мере две точки.

а) Пусть A — связное множество в X и B — множество в $\mathbf{C}A$, открыто-замкнутое относительно $\mathbf{C}A$; показать, что $A \cup B$ связно. [Применить упражнение 5 § 3 к $Y = A \cup B$ и $Z = \mathbf{C}A$.]

б) Пусть A — связное множество в X и B — связная компонента множества $\mathbf{C}A$; показать что $\mathbf{C}B$ связно. [Использовать а).]

в) Вывести из б), что в X существуют связные множества M, N, отличные от X, для которых $M \cup N = X$, $M \cap N = \varnothing$.

°5) а) Дать пример убывающей последовательности (A_n) связных множеств в $\mathbf{R}^2$, пересечение которых не связно (см. гл. II, § 4, упражнение 14).

б) Пусть X — множество в $\mathbf{R}^2$, получаемое объединением открытых полуплоскостей $y > 0$, $y < 0$ и точек $(n, 0)$ (n — целое $\geqslant 1$); оно связно в топологии $\mathscr{T}_0$, индуцируемой из $\mathbf{R}^2$. Определить в X последовательность топологий $(\mathscr{T}_n)$ так, чтобы $\mathscr{T}_{n+1}$ мажорировало $\mathscr{T}_n$ и X было связно в каждой топологии $\mathscr{T}_n$, но не было связно для их верхней грани. [Переходить от $\mathscr{T}_n$ к $\mathscr{T}_{n+1}$, вводя новые окрестности для точки $(n+1, 0)$.]

6) Пусть X и Y — связные пространства и A (соотв. B) — множество в X (соотв. Y), отличное от X (соотв. Y). Показать, что в пространстве $X \times Y$ дополнение к $A \times B$ есть связное множество.

7) Пусть X и Y — связные пространства и f — такое отображение их произведения $X \times Y$ в топологическое пространство Z, что каждое из частичных отображений $f(\ , y)\colon X \to Z$ и $f(x, \ )\colon Y \to Z$ ($x \in X$, $y \in Y$) непрерывно. Показать, что $f(X \times Y)$ связно.

*8) Предположим, что в примере топологии в произведении $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$, данном в упражнении 9 § 4, множество I бесконечно и кардинальное число $\mathfrak{c}$ несчетно. Показать, что если все X_ι связны, регулярны и имеют каждое по крайней мере две различные точки, то связная компонента точки $a = (a_\iota)$ в X есть множество тех $x = (x_\iota)$, у которых $x_\iota = a_\iota$ для всех кроме конечного числа индексов $\iota \in I$. [Сводится к случаю, когда $I = \mathbf{N}$; рассмотреть такие две точки $b = (b_n)$, $c = (c_n)$ в X, для которых $b_n \neq c_n$ при любом n. Пусть $(V_{nm})_{m \geqslant 0}$ для каждого n — последовательность открытых окрестностей точек b_n в X_n, не содержащих c_n и таких, что $\overline{V}_{n,m+1} \subset V_{nm}$, а Z — множество всех точек (x_n) из X, обладающих следующим свойством: существует целое $k > 0$ такое, что $x_n \in V_{n,n-k}$ для всех $n \geqslant k$; показать, что Z открыто-замкнуто в X.]

°9) Показать, что в локально компактном пространстве X, определенном в упражнении 20 § 10, имеются точки x, связная компонента которых в X отлична от пересечения всех содержащих x открыто-замкнутых в X множеств.

10) Показать, что совершенно упорядоченное множество X, наделенное топологией $\mathscr{T}_+(X)$ или $\mathscr{T}_-(X)$ (§ 2, упражнение 5), вполне несвязно.

11) Пусть X — топологическое пространство и R — отношение эквивалентности в X, каждый класс которого содержится в некоторой связной компоненте пространства X. Показать, что связные компоненты факторпространства X/R являются каноническими образами связных компонент из X (см. гл. III, 3-е изд., § 2, упражнение 17).

12) Пусть X — топологическое пространство. Показать равносильность следующих трех условий: α) все связные компоненты пространства X открыты; β) всякая точка $x \in X$ обладает окрестностью, содержащейся в каждом открыто-замкнутом множестве, содержащем x; γ) для любого $x \in X$ пересечение всех открыто-замкнутых множеств, содержащих x, есть открытое множество.

°13) Пусть θ — иррациональное число. Рассмотрим отображение f числовой прямой $\mathbf{R}$ в тор $\mathbf{T}^2$, сопоставляющее каждой точке $t \in \mathbf{R}$ канонический образ в $\mathbf{T}^2$ точки $(t, \theta t) \in \mathbf{R}^2$; f инъективно и непрерывно. Показать, что в топологии $\mathscr{T}$, являющейся прообразом относительно f топологии тора $\mathbf{T}^2$, $\mathbf{R}$ связно, но ни одна его точка не обладает фундаментальной системой связных окрестностей.$_\circ$

*14) а) Пусть X — локально связное локально компактное пространство, A — замкнутое множество в X, A^* — объединение множества A и всех относительно компактных связных компонент множества $\mathbf{C}A$.

Будем называть A *цельным*, если $A^*=A$. Показать, что A^* замкнуто и цельно.

б) Пусть X, кроме того, связно. Показать, что если A — компактное множество в X, то A^* компактно. [Рассмотреть компактную окрестность V множества A и связные компоненты его дополнения $\mathbf{C}A$, пересекающиеся с границей множества V.]

в) Пусть X, кроме того, связно и счетно в бесконечности. Показать, что существует возрастающая последовательность $(K_n)_{n\geqslant 0}$ компактных, связных и *цельных* множеств, объединение которых совпадает с X, таких, что $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ для каждого n.

°г) Показать, что утверждение пункта б) теряет силу, если предполагать, что X только связно и локально компактно или только отделимо, связно и локально связно. [Рассмотреть в $\mathbf{R}^2$ подпространство, образованное теми (x, y), у которых $y = 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$ или $x = \dfrac{1}{n}$ (n— целое $\geqslant 1$) и $y > 0$.]$_\circ$

*15) Пусть X — связное локально связное пространство.

а) Пусть M и N — непустые замкнутые множества в X без общих точек. Показать, что существует связная компонента множества $\mathbf{C}(M \cup N)$, имеющая точки прикосновения в M и в N. [Заметить, что связная компонента C множества $\mathbf{C}(M \cup N)$, не имеющая точек прикосновения в M, открыто-замкнута относительно $\mathbf{C}N$.]

б) Вывести из а), что если A — замкнутое множество в X, отличное от X, то всякая его связная компонента пересекается с замыканием множества $\mathbf{C}A$.

°16) Пусть X — подпространство пространства $\mathbf{R}^2$, получаемое объединением прямой $y = 0$, замкнутых отрезков с концами (0, 1) и $\left(n, \dfrac{1}{n+1}\right)$ и полупрямых $x \leqslant n$, $y = \dfrac{1}{n+1}$. Показать, что пространство X

связно, но в нем имеется связная компонента дополнения точки (0, 1), для которой эта точка не является точкой прикосновения. [Сравнить с упражнениями 4а и 15а.]$_\circ$

°17) Пусть I_0— интервал $[-1, 1]$ в $\mathbf{R}$, P_0—его факторпространство, получаемое отождествлением в I_0 точек $\frac{1}{2}$ и 1, а B_0— факторпространство, получаемое отождествлением в I_0, с одной стороны, точек $\frac{1}{2}$ и 1, а с другой,— точек $-\frac{1}{2}$ и -1. Пусть, далее, I — интервал $]-1, 1[$ в $\mathbf{R}$, P — его канонический образ в P_0, B — канонический образ в B_0.

а) Показать, что никакие два из пространств I, P, B не гомеоморфны. [Чтобы убедиться в том, что I и P не гомеоморфны, заметить, что в P существуют точки со связным дополнением; аналогично для двух других пар пространств.]

б) Пусть X — сумма счетно-бесконечного семейства пространств, гомеоморфных I, и счетно-бесконечного семейства пространств, гомеоморфных B, а Y — сумма пространств X и P. Показать, что X и Y не гомеоморфны, но: 1° существуют непрерывная биекция X на Y и непрерывная биекция Y на X; 2° X гомеоморфно открытому подпространству пространства Y, а Y гомеоморфно открытому подпространству пространства X.$_\circ$

°18) Пусть X — плоскость $\mathbf{R}^2$, R — отношение эквивалентности в X, классами которого служат прямые $y = \beta$ для всех $\beta > 0$ и полупрямые $x = \alpha$, $y \leqslant 0$ для всех $\alpha \in \mathbf{R}$. Показать, что в X/R, рассматриваемом как подмножество в $\mathfrak{P}_0(X)$, топология, которую индуцирует $\mathscr{T}_\Omega$ (§ 2, упражнение 7), дискретна, а топология, которую индуцирует $\mathscr{T}_\Phi$, не дискретна, но X/R в этой топологии не связно; наконец, X/R, наделенное фактортопологией, связно.$_\circ$

°*19) Пусть X — локально компактное пространство; тогда можно показать, что X отождествимо со всюду плотным открытым подпространством универсального компактного пространства $\tilde{X}$, построенного в упражнении 26 § 9 (см. гл. IX, 2-е изд., § 1, упражнение 8). Предположим, кроме того, что X связно и локально связно.

а) Показать, что для любого компактного множества K в X множество тех связных компонент множества $X - K$, которые не являются относительно компактными, конечно [см. упражнение 14б]. Вывести отсюда, что точка из $\tilde{X} - X$ может быть точкой прикосновения только одной связной компоненты множества $X - K$. [Пусть A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — некомпактные связные компоненты множества $X - K$ и C_i— компактное множество всех точек из $\tilde{X} - X$, служащих точками прикосновения для A_i; построить компактное пространство, имеющее своим носителем сумму X и всех C_i, и такое, чтобы X отождествлялось с его всюду плотным открытым подпространством.]

б) Пусть $R'\{x, y\}$ — следующее отношение эквивалентности в $\tilde{X} - X$: «для любого компактного множества K в X точки x и y служат точками прикосновения одной и той же некомпактной связной компоненты множества $X - K$». Пусть R — отношение эквивалентности в $\tilde{X}$, классами которого являются классы по R' и все одноточечные множества из X. Показать, что R отделимо, что X отождествимо со всюду плотным открытым подпространством компактного пространства $X^b \approx \tilde{X}/R$ и что в компактном пространстве $X^b - X$ всякая точка есть пересечение своих открыто-замкнутых окрестностей. Точки из $X^b - X$ называются *концами* пространства X.

в) Пусть Y — такое компактное пространство, что X отождествимо с его всюду плотным открытым подпространством и каждая точка компактного пространства $Y - X$ есть пересечение своих открыто-замкнутых окрестностей *). Показать, что существует непрерывное отображение пространства X^b в Y, тождественное на X. [Показать, что если $Y - X$ есть объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств A и B, то в Y существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $Y - (U \cup V)$ компактно.]

г) Показать, что если X счетно в бесконечности, то пространство $X^b - X$ обладает счетным базисом.

д) Число концов числовой прямой равно двум, а пространства $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) — единице. Дать пример локально компактного связного и локально связного подпространства в $\mathbf{R}^2$, множество концов которого имело бы мощность континуума.

20) Пусть X — отделимое пространство, каждая точка которого обладает фундаментальной системой открыто-замкнутых окрестностей, Y — подпространство пространства X и A — компактное множество в Y, открыто-замкнутое относительно Y. Показать, что в X существует множество B, открыто-замкнутое относительно X и такое, что $B \cap Y = A$.

*21) а) Для топологического пространства X следующие условия равносильны: 1° замыкание $\overline{U}$ каждого открытого множества U в X открыто; 2° внутренность $\mathring{F}$ каждого замкнутого множества F в X замкнута; 3° если открытые множества U и V из X не пересекаются, то и их замыкания $\overline{U}$ и $\overline{V}$ не пересекаются. Отделимое пространство, удовлетворяющее этим условиям, называют *экстремально несвязным*; оно тогда вполне несвязно. Рациональная прямая есть вполне несвязное пространство, не являющееся экстремально несвязным.

б) Для того чтобы отделимое пространство было экстремально несвязным, необходимо и достаточно, чтобы ассоциированное полурегулярное пространство (§ 8, упражнение 20) обладало тем же свойством.

---

*) Это условие равносильно тому, что $Y - X$ вполне несвязно (гл. II, § 4, предложение 6).

в) Пусть X — отделимое топологическое пространство и A — его всюду плотное подпространство. Показать, что если A экстремально несвязно и топология пространства X A-максимальна (§ 3, упражнение 11), то X экстремально несвязно.

г) Вывести из б) и в), что для всякого бесконечного множества X (компактное) пространство всех ультрафильтров в X экстремально несвязно (см. § 9, упражнения 27 и 25) *).

д) Пусть X — отделимое топологическое пространство без изолированных точек. Для того чтобы его топология была квазимаксимальной (§ 2, упражнение 6), необходимо и достаточно, чтобы X было субмаксимально (§ 8, упражнение 22) и экстремально несвязно. [Для доказательства достаточности использовать упражнение 22д § 8 и доказать, что в X всякое замкнутое множество без изолированных точек открыто.]

е) Показать, что всякое ультрарегулярное пространство (§ 8, упражнение 25) экстремально несвязно, но экстремально несвязное компактное пространство без изолированных точек не ультрарегулярно (см. § 9, упражнение 28).

ж) Показать, что экстремально несвязное полурегулярное (§ 8, упражнение 20) пространство регулярно [см. главу II, § 4, упражнение 12].

з) Показать, что в экстремально несвязном пространстве не существует сходящихся последовательностей с бесконечным числом попарно различных членов. [Рассуждая от противного, образовать по индукции такие две последовательности (U_n) и (V_n) попарно не пересекающихся открытых множеств, с объединениями $U=\bigcup_n U_n$ и $V=\bigcup_n V_n$, что $U\cap V=\varnothing$, а $\overline{U}\cap\overline{V}\neq\varnothing$.]

и) Показать, что в экстремально несвязном пространстве X неизолированная точка a не может иметь *вполне упорядоченную* (по отношению $\supset$) фундаментальную систему открыто-замкнутых окрестностей. [Рассуждать от противного, как в з).]

*22) а) В экстремально несвязном пространстве (упражнение 21) все открытые подпространства и все всюду плотные подпространства экстремально несвязны.

б) Пусть X — отделимое пространство, всякая точка которого имеет окрестность, являющуюся экстремально несвязным подпространством. Показать, что тогда X экстремально несвязно.

в) Дать пример отделимого не экстремально несвязного пространства X, в котором существует экстремально несвязное всюду плотное открытое подпространство. [Склеить два экстремально несвязных пространства.]

*) По поводу примеров экстремально несвязных компактных пространств без изолированных точек см. гл. II, § 4, упражнение 12б.

г) Пусть X — счетное дискретное пространство, $\tilde{X}$ — (компактное) пространство всех ультрафильтров в X (§ 9, упражнение 27) и $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — счетно-бесконечное разбиение пространства X на бесконечные множества; в замкнутом подпространстве $Y=\tilde{X}-X$ пространства $\tilde{X}$ множества $B_n=\overline{A}_n\cap Y$ открыто-замкнуты и попарно не пересекаются. Пусть $B=\bigcup_n B_n$; показать, что замыкание $\overline{B}$ множества B в Y не является открытым в Y и, следовательно, Y не экстремально несвязно *). [Рассуждать от противного: согласно упражнению 20, существует открыто-замкнутое множество C в $\tilde{X}$ такое, что $C\cap Y=\overline{B}$; взяв в каждом множестве $C\cap A_n$ по точке x_n, рассмотреть образованное ими множество J и его замыкание $\overline{J}$ и показать, что $\overline{J}\cap B=\varnothing$.]

23) Дать пример биективного отображения f отделимого пространства X в отделимое пространство Y, при котором образ всякого компактного множества из X был бы компактным множеством в Y и образ всякого связного множества из X был бы связным множеством в Y, но которое не являлось бы непрерывным. [См. § 9, упражнение 4.]

24) Пусть X — топологическое пространство.

а) Наделим множество $\mathfrak{P}_0(X)$ одной из топологий $\mathscr{T}_\Omega$, $\mathscr{T}_\Phi$ (§ 2, упражнение 7) или $\mathscr{T}_\Theta$ (§ 8, упражнение 12). Показать, что если множество $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{P}_0(X)$ связно и каждое множество $M\in\mathfrak{B}$ связно, то объединение $\bigcup_{M\in\mathfrak{B}} M$ связно.

б) Пусть $\mathfrak{S}$ — множество в $\mathfrak{P}_0(X)$, содержащее множество всех непустых конечных подмножеств из X. Показать, что если X связно, то и $\mathfrak{S}$ связно. [Рассмотреть отображения $(x_1, \ldots, x_n)\longmapsto\{x_1, \ldots, x_n\}$, использовав упражнение 7б § 2 и предложение 8.]

*25) Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f\colon X\to Y$ называют *локальным гомеоморфизмом*, если любая точка $x\in X$ обладает такой окрестностью U, что $f(U)$ есть окрестность точки $f(x)$ в Y и отображение $U\to f(U)$, совпадающее с f на U, есть гомеоморфизм. Всякий локальный гомеоморфизм есть открытое непрерывное отображение.

а) Пусть X отделимо, Y локально связно и $f\colon X\to Y$ — локальный гомеоморфизм, для которого существует такое целое $n>0$, что $f^{-1}(y)$ состоит точно из n точек при любом $y\in Y$. Показать, что любая точка $y\in Y$ обладает такой открытой окрестностью V, что $f^{-1}(V)$ имеет n связных компонент U_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ и отображения $U_i\to V$, совпадающие с f на U_i, являются гомеоморфизмами; f является тогда совершенным отображением

*) Упражнения 21в и 22г сообщил нам R. Ricabarra.

б) Пусть X отделимо, Y связно и локально связно и $f\colon X \to Y$ — *совершенный* локальный гомеоморфизм; показать, что f удовлетворяет условиям, указанным в а). [Пусть Y_n для каждого целого $n>0$ — множество тех $y \in Y$, для которых $f^{-1}(y)$ имеет по крайней мере n точек; показать, что Y_n открыто-замкнуто в Y.]

°в) Дать пример не совершенного сюръективного локального гомеоморфизма $f\colon X \to Y$, где Y компактно, связно и локально связно, X локально компактно, связно и локально связно, а $f^{-1}(y)$ для каждого $y \in Y$ содержит не более двух точек [см. § 5, упражнение 4].

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДОПОЛНЕНИЯ О ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДЕЛАХ МНОЖЕСТВ

1. *Проективные системы подмножеств*

Определения *проективной системы множеств* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ относительно предупорядоченного множества индексов I, *проективного предела* $X=\varprojlim X_\alpha$ такой системы и канонического отображения f_α множества X в каждое из X_α (Теор. множ., гл. III, § 1, n° 12) не опираются на предположение, что множество I — *фильтрующееся*; поэтому они распространяются на *произвольное предупорядоченное множество* I. То же относится и к определению *проективной системы отображений* u_α: $X_\alpha \to X'_\alpha$, где $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ и $(X'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ — проективные системы множеств относительно I, и к ее проективному пределу $u=\varprojlim u_\alpha$ (там же). При этом все результаты, доказанные в n° 12 § 1 гл. III Теории множеств, остаются в силе и без предположения о фильтруемости I, *кроме* результата, относящегося к канонической биекции $\varprojlim X_\alpha$ на проективный предел подсемейства семейства (X_α), соответствующего кофинальной части множества I.

Пусть M_α для каждого $\alpha \in I$ — подмножество множества X_α. Если $\alpha \leqslant \beta$ влечет $f_{\alpha\beta}(M_\beta) \subset M_\alpha$, то говорят, что M_α образуют *проективную систему подмножеств множеств* X_α. Пусть $g_{\alpha\beta}$ — сужение $f_{\alpha\beta}$ на M_β для $\alpha \leqslant \beta$; его можно рассматривать как отображение M_β в M_α: при этом ясно, что $(M_\alpha, g_{\alpha\beta})$ — проективная система множеств и $\varprojlim M_\alpha = X \cap (\prod_{\alpha \in I} M_\alpha)$. В частности, ясно, что множества $M_\alpha = f_\alpha(X)$ образуют проективную систему подмножеств X_α и

$\varprojlim X_\alpha = \varprojlim M_\alpha$; отметим, что для любого $\alpha \in I$ будем иметь $M_\alpha = f_\alpha(X) \subset \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(X_\beta)$ и все $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha \leqslant \beta)$ *сюръективны*.

Предложение 1. *Пусть* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *и* $(X'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ — *проективные системы множеств относительно* I *и* u_α *для каждого* $\alpha \in I$ — *отображение* X_α *в* X'_α, *причем* u_α *образуют проективную систему отображений. Пусть* $u = \varprojlim u_\alpha$. *Тогда для каждого* $x' = (x'_\alpha) \in \varprojlim X'_\alpha$ *множества* $u_\alpha^{-1}(x'_\alpha)$ *образуют проективную систему подмножеств множеств* X_α *и* $u^{-1}(x') = \varprojlim u_\alpha^{-1}(x'_\alpha)$.

Предложение очевидным образом следует из определений.

2. *Критерий непустоты проективного предела*

Пусть $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система множеств относительно предупорядоченного множества I, причем $f_{\alpha\alpha}$ для каждого $\alpha \in I$ есть тождественное отображение X_α на себя. Предположим, что для каждого $\alpha \in I$ задано множество $\mathfrak{S}_\alpha$ подмножеств множества X_α, причем выполнены следующие аксиомы:

(I) *Всякое пересечение множеств из* $\mathfrak{S}_\alpha$ *принадлежит* $\mathfrak{S}_\alpha$.

В частности (рассматривая пересечение пустого семейства), получаем, что $X_\alpha \in \mathfrak{S}_\alpha$.

(II) *Если множество подмножеств* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}_\alpha$ *обладает тем свойством, что пересечение любого конечного числа принадлежащих ему множеств не пусто, то* $\bigcap_{M \in \mathfrak{F}} M$ *не пусто.*

Принимая во внимание (I), аксиома (II) равносильна следующей аксиоме:

(II′) *Если* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}_\alpha$ *есть множество, фильтрующееся по убыванию, все элементы которого не пусты, то* $\bigcap_{M \in \mathfrak{B}} M$ *не пусто.*

Теорема 1. *Пусть* I — фильтрующееся *множество, для всех* $\mathfrak{S}_\alpha$ *выполнены аксиомы* (I) *и* (II) *и. кроме того, проективная система* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(III) $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha) \in \mathfrak{S}_\beta$ *для любой пары индексов* α, β *таких, что* $\alpha \leqslant \beta$, *и любого* $x_\alpha \in X_\alpha$.

(IV) $f_{\alpha\beta}(M_\beta) \in \mathfrak{S}_\alpha$ *для любой пары индексов* α, β *таких, что* $\alpha \leqslant \beta$, *и любого* $M_\beta \in \mathfrak{S}_\beta$.

Пусть $X = \varprojlim X_\alpha$; *тогда*:

а) *Для любого* $\alpha \in I$ *имеем*

$$f_\alpha(X) = \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(X_\beta), \tag{1}$$

где f_α — *каноническое отображение* $X \to X_\alpha$.

б) *Если* X_α *не пусто для каждого* $\alpha \in I$, *то* X *не пусто.*

Пусть Σ — *множество всех семейств* $\mathfrak{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$, удовлетворяющих условиям:

$$A_\alpha \neq \varnothing \text{ и } A_\alpha \in \mathfrak{S}_\alpha \text{ для каждого } \alpha \in I; \tag{2}$$

$$f_{\alpha\beta}(A_\beta) \subset A_\alpha \text{ для всех } \alpha, \beta \text{ таких, что } \alpha \leqslant \beta. \tag{3}$$

Пусть отношение $\mathfrak{A} \geqslant \mathfrak{A}'$ для элементов $\mathfrak{A} = (A_\alpha)$ и $\mathfrak{A}' = (A'_\alpha)$ из Σ означает, что $A_\alpha \subset A'_\alpha$ при любом α; ясно, что Σ *упорядочено* этим отношением.

1° Докажем сперва, что Σ *индуктивно*. Пусть L — совершенно упорядоченное множество и $\lambda \mapsto \mathfrak{A}^\lambda = (A^\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ — его строго возрастающее отображение в Σ. Для каждого $\alpha \in I$ положим $B_\alpha = \bigcap_{\lambda \in L} A^\lambda_\alpha$; очевидно, семейство $\mathfrak{B} = (B_\alpha)$ удовлетворяет условию (3); в силу (I) и (II) оно удовлетворяет также условию (2), так что $\mathfrak{B} \in \Sigma$, и ясно, что $\mathfrak{B}$ мажорирует множество всех $\mathfrak{A}^\lambda$.

2° Пусть $\mathfrak{A} = (A_\alpha)$ означает *максимальный* элемент из Σ; покажем, что тогда $A_\alpha = f_{\alpha\beta}(A_\beta)$ для всех пар α, β таких, что $\alpha \leqslant \beta$. Действительно, положим $A'_\alpha = \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(A_\beta)$ для каждого $\alpha \in I$ и покажем, что $\mathfrak{A}' = (A'_\alpha)$ принадлежит Σ. Заметим сначала, что если $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, то в силу (3) $f_{\alpha\gamma}(A_\gamma) = f_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(A_\gamma)) \subset f_{\alpha\beta}(A_\beta)$; кроме того, при $\alpha \leqslant \beta$ имеем $f_{\alpha\beta}(A_\beta) \in \mathfrak{S}_\alpha$ в силу (IV) и $f_{\alpha\beta}(A_\beta) \neq \varnothing$ в силу (2); условия (I) и (II) показывают тогда, что $\mathfrak{A}'$ удовлетворяет условию (2). Наконец, $\mathfrak{A}'$ удовлетворяет также условию (3): в самом деле, если $\alpha \leqslant \beta$, то $f_{\alpha\beta}(A'_\beta) \subset \bigcap_{\gamma \geqslant \beta} f_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(A_\gamma)) = \bigcap_{\gamma \geqslant \beta} f_{\alpha\gamma}(A_\gamma)$; с другой стороны, для любого $\delta \geqslant \alpha$ существует такое $\gamma \in I$, что

$\gamma \geqslant \delta$ и $\gamma \geqslant \beta$; значит, $f_{\alpha\gamma}(A_\gamma) \subset f_{\alpha\delta}(A_\delta)$ и, следовательно, $\bigcap_{\gamma \geqslant \beta} f_{\alpha\gamma}(A_\gamma) = \bigcap_{\delta \geqslant \alpha} f_{\alpha\delta}(A_\delta) = A'_\alpha$, чем завершено установление того, что $\mathfrak{A}' \in \Sigma$. Поскольку $A'_\alpha \subset A_\alpha$ для каждого α, из предположенной максимальности $\mathfrak{A}$ следует, что $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, и наше утверждение доказано.

3° Покажем теперь, что если $\mathfrak{A} = (A_\alpha)$ — *максимальный* элемент из Σ, то каждое A_α *состоит из одного элемента*. Пусть $x_\alpha \in A_\alpha$. Для каждого $\beta \geqslant \alpha$ положим $B_\beta = A_\beta \cap f^{-1}_{\alpha\beta}(x_\alpha)$, а для остальных β положим $B_\beta = A_\beta$; покажем, что тогда $\mathfrak{B} = (B_\beta)$ принадлежит Σ. Если неверно, что $\beta \geqslant \alpha$, то $\beta \leqslant \gamma$ влечет $f_{\beta\gamma}(B_\gamma) \subset f_{\beta\gamma}(A_\gamma) \subset A_\beta = B_\beta$; если, напротив, $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, то, поскольку $f^{-1}_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = f^{-1}_{\beta\gamma}(f^{-1}_{\alpha\beta}(x_\alpha))$, будем иметь $f^{-1}_{\beta\gamma}(f^{-1}_{\alpha\gamma}(x_\alpha)) \subset f^{-1}_{\alpha\beta}(x_\alpha)$, и так как $f_{\beta\gamma}(A_\gamma) \subset A_\beta$, то снова $f_{\beta\gamma}(B_\gamma) \subset B_\beta$; таким образом, семейство $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию (3). Так как, согласно 2°, $\alpha \leqslant \beta$ влечет $A_\alpha = f_{\alpha\beta}(A_\beta)$, то ясно, что $B_\beta \neq \varnothing$ для каждого $\beta \in I$; наконец, в силу (I) и (III), $B_\beta \in \mathfrak{S}_\beta$ для каждого $\beta \in I$, чем завершается доказательство того, что $\mathfrak{B} \in \Sigma$. Поскольку $B_\beta \subset A_\beta$ для каждого $\beta \in I$, из предположенной максимальности $\mathfrak{A}$ следует, что $B_\beta = A_\beta$ для каждого β и, в частности, $A_\alpha = \{x_\alpha\}$.

4° Теперь можно перейти к доказательству теоремы 1. Докажем сначала а). Мы уже знаем, что $f_\alpha(X) \subset \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(X_\beta)$. Обратно, пусть $x_\alpha \in \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(X_\beta)$. Положим $B_\beta = f^{-1}_{\alpha\beta}(x_\alpha)$, если $\beta \geqslant \alpha$, и $B_\beta = X_\beta$ в противном случае; по определению x_α, множества B_β не пусты, и в силу (III) и (I) $B_\beta \in \mathfrak{S}_\beta$ для каждого $\beta \in I$; кроме того, очевидно $\beta \leqslant \gamma$ влечет $f_{\beta\gamma}(B_\gamma) \subset B_\beta$. Таким образом, $\mathfrak{B} = (B_\beta) \in \Sigma$. Пусть $\mathfrak{A} = (A_\beta)$ — максимальный элемент из Σ такой, что $\mathfrak{A} \geqslant \mathfrak{B}$; существование его вытекает (в силу 1°) из теоремы Цорна; так как (по 3°) A_β для каждого $\beta \in I$ имеет вид $\{y_\beta\}$, то $y = (y_\beta)$ принадлежит X, и $f_\alpha(y) = y_\alpha = x_\alpha$ по определению.

Покажем, наконец, что а) влечет б). Действительно, I можно предполагать непустым (иначе нечего было бы доказывать); из предположенной непустоты всех X_α следует, что $f_{\alpha\beta}(X_\beta) \neq \varnothing$ при $\alpha \leqslant \beta$; так как $f_{\alpha\beta}(X_\beta)$ при фиксированном α и $\beta \geqslant \alpha$ образуют фильтрующееся по убыванию множество подмножеств множества X_α, принадлежащих $\mathfrak{S}_\alpha$, то условие (II′) показывает,

что $\bigcap_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(X_\beta) \neq \varnothing$. Таким образом, в силу а), $f_\alpha(X) \neq \varnothing$ и тем более $X \neq \varnothing$, что и требовалось доказать.

Замечание. Предположим, что в формулировке теоремы 1 условие (III) заменено следующим более слабым условием:

(III′) *Для каждого* $\alpha \in I$ *и каждого непустого множества* $M_\alpha \in \mathfrak{S}_\alpha$ *существует такое* $x_\alpha \in M_\alpha$, *что* $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha) \in \mathfrak{S}_\beta$ *для всех* $\beta \geqslant \alpha$.

Тогда утверждение б) теоремы 1 еще сохраняет силу. В самом деле, доказательства пунктов 1° и 2° при этом не изменятся. Доказательство пункта 3° останется в силе, если брать $x_\alpha \in A_\alpha$ так, чтобы $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$ принадлежало $\mathfrak{S}_\beta$ для каждого $\beta \geqslant \alpha$. Наконец, рассуждение пункта 4° показывает, что если $\bigcap_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(X_\beta) \neq \varnothing$ и в этом множестве x_α взято так, что $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha) \in \mathfrak{S}_\beta$ для каждого $\beta \geqslant \alpha$, то существует такое $y \in X$, что $f_\alpha(y) = x_\alpha$, чем наше утверждение и доказано

Примеры. I) Пусть все X_α — *компактные* пространства, а все $f_{\alpha\beta}$ — *непрерывные* отображения; тогда можно применить теорему 1, взяв в качестве $\mathfrak{S}_\alpha$ множество всех *замкнутых* множеств из X_α. О подробностях этого применения см. § 9, n° 6.

II) Пусть A — кольцо с единицей и T_α для каждого $\alpha \in I$ — *артиновский* левый A-модуль (Алгебра, гл. VIII, § 2, n° 1); пусть X_α — *однородное пространство* над T_α, в котором T_α действует точно (так что можно сказать, что X_α есть *аффинное пространство*, ассоциированное с T_α (Алгебра, гл. II, Приложение II, n° 1). Предположим, что для каждой пары α, β, в которой $\alpha \leqslant \beta$, $f_{\alpha\beta}$: $X_\beta \to X_\alpha$ есть *аффинное отображение* (Алгебра, гл. II, Приложение II, n° 4).

Возьмем в качестве $\mathfrak{S}_\alpha$ множество, состоящее из пустого подмножества и всех *аффинных линейных многообразий* пространства X_α (Алгебра, гл. II, Приложение II, n° 3). Тогда условие (I) выполняется тривиальным образом, а условие (II) вытекает из того, что T_α — артиновский: в самом деле, это влечет существование минимального элемента среди пересечений конечных наборов множеств $M \in \mathfrak{F}$ и этот элемент необходимо равен $\bigcap_{M \in \mathfrak{F}} M$. Наконец, поскольку $f_{\alpha\beta}$ аффинно, условия (III) и (IV) тривиально выполнены.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ I

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

Понятия предела и непрерывности восходят к древности; история их развития не была бы полной без систематического изучения с этой точки зрения не только математиков, но и философов Греции, в частности Аристотеля, как и без рассмотрения эволюции этих идей в математике Возрождения и в период возникновения дифференциального и интегрального исчислений. Однако такое исследование, предпринять которое было бы, конечно, интересно, вышло бы далеко за рамки этого очерка.

Основателем топологии, как и многих других ветвей современной математики, следует считать Римана; действительно, именно он первым пытался выделить понятие топологического пространства, выдвинул идею самостоятельной теории этих пространств, определил инварианты («числа Бетти»), сыгравшие чрезвычайно важную роль в дальнейшем развитии топологии, и дал им первые применения в анализе (периоды абелевых интегралов). Но путь Риману во многих отношениях подготовило развитие математической мысли первой половины XIX века. В самом деле, стремление подвести под математику надежное основание, вызвавшее столько важных исследований на протяжении всего XIX века и вплоть до наших дней, привело к корректному определению понятий сходящегося ряда и числовой последовательности, стремящейся к пределу (Коши, Абель), а также понятия непрерывной функции (Больцано, Коши). С другой стороны, данное Гауссом и Арганом геометрическое представление (точками плоскости) комплексных или «мнимых», как говорят еще до сих пор, чисел (называвшихся в XVIII веке иногда также «невозможными» числами) сделалось привычным для большинства математиков; оно означало прогресс того же порядка, как для наших дней усвоение геометрического языка при изучении гильбертова пространства, и содержало в зародыше возможность геометрического представления всякого объекта, способного к непрерывному изменению; Гаусс, который, впрочем, был естественно приведен к подобным представлениям своими исследованиями по осно-

ваниям геометрии, неевклидовой геометрии и теории поверхностей, по-видимому, уже имел в виду такую возможность, ибо, определяя (независимо от Аргана и французских математиков) геометрическое представление мнимых чисел, воспользовался выражением «двукратно протяженная величина» ((I), стр. 101—103 и 175—178).

Исследования по алгебраическим функциям и их интегралам, с одной стороны, и (навеянные в значительной мере изучением трудов Гаусса) размышления об основаниях геометрии, с другой,— привели Римана к формулированию программы исследований, являющейся программой и современной топологии, и побудили его положить начало реализации этой программы. Вот, например, что пишет Риман в своей «Теории абелевых функций» ((II), стр. 91):

«*При изучении функций, возникающих при интегрировании полных дифференциалов, почти невозможно обойтись без некоторых предложений, относящихся к Analysis situs. Под этим наименованием, употреблявшимся, хотя, быть может, и не совсем в том же смысле, Лейбницем, следует понимать ту часть учения о непрерывных величинах, которая рассматривает эти величины не как существующие независимо от их положения и измеряемые одна другою, но, отвлекаясь от всего, связанного с измерением, подвергает изучению лишь отношения их взаимного расположения и включения. Оставляя на будущее рассмотрение этих вопросов, полностью освобожденное от всего, связанного с измерением...*».

И в его знаменитой вступительной лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» ((II), стр. 272):

«*... общее понятие многократно протяженных величин* *), *охватывающее, в частности, пространственные величины, оставалось совершенно неразработанным...*» (стр. 272).

«*...Понятие величины возможно лишь в том случае, когда имеется нечто общее, допускающее различные состояния. В зависимости от того, существует или нет непрерывный переход от одного состояния к другому, эти состояния образуют непрерывное или дискретное многообразие; отдельные состояния называются в первом случае точками, во втором — элементами многообразия*» (стр. 273).

«*...Измерение состоит в наложении одной из сравниваемых величин на другую; поэтому для измерения требуется, чтобы имелся способ перенесения одной величины, как масштаба, по другой. Если такой способ отсутствует, то сравнивать две величины можно лишь в том случае, когда одна из них составляет часть другой... Исследования, которые можно в этом случае проводить, образуют общую, независимую от мероопределений, часть учения о величинах, в которой величины мыслятся не как существующие независимо от их расположения и не как выражаемые через некоторую единицу измерения, но как части некоторого многообразия. Такого рода исследования стали*

---

*) Риман понимает под этим, как видно из дальнейшего, часть топологического пространства любого числа измерений.

необходимыми для многих отраслей математики, особенно при изучении многозначных аналитических функций...» (стр. 274).

«...*Определение положения на данном многообразии, когда такое определение возможно, приводится к определению конечного количества числовых значений. Впрочем, существуют также многообразия, для которых определение положения требует не конечного количества, а бесконечного ряда или непрерывного множества числовых значений. Такого рода многообразия образуют, например, возможные задания функции в данной области, возможные формы пространственной фигуры и т. п.*» (стр. 276).

В этой последней фразе впервые намечена идея изучения функциональных пространств; впрочем, та же идея нашла выражение уже в диссертации Римана: «*Совокупность этих функций*,— говорит он в связи с проблемой минимума, известной под названием принципа Дирихле,— *образует замкнутую в себе связную область*» ((II), стр. 30), что, хотя и в несовершенной форме, является зародышем доказательства, данного впоследствии принципу Дирихле Гильбертом, и даже большинства приложений функциональных пространств к вариационному исчислению.

Как уже было сказано, Риман положил начало выполнению этой грандиозной программы, определив «числа Бетти» сперва для поверхности ((II), стр. 92—93), а затем ((II), стр. 479—482; см. также (III)) для многообразия любого числа измерений и применив это определение к теории интегралов; по этому поводу, а также по поводу значительного развития, которое получила эта теория после Римана, мы отсылаем читателя к историческим очеркам, которые будут в настоящем трактате сопровождать главы, посвященные алгебраической топологии.

Что касается общей теории топологических пространств, какой ее в общих чертах представлял себе Риман, то для ее развития было необходимо предварительное, более систематическое, чем во времена Римана, изучение теории вещественных чисел, числовых множеств и точечных множеств на прямой, плоскости и в пространстве; это изучение было связано в свою очередь с (полуфилософским у Больцано и чисто математическим у Дедекинда) исследованием природы иррационального числа, а также с прогрессом теории функций вещественной переменной (в которую сам Риман внес существенный вклад своим определением интеграла и своей теорией тригонометрических рядов и которой посвятили свои работы, среди прочих математиков, Дюбуа-Реймон, Дини, Вейерштрасс). Она явилась делом второй половины XIX века, и прежде всего Кантора, который первый определил (сперва на прямой, а затем в n-мерном евклидовом пространстве) понятия точки сгущения, замкнутого, открытого и совершенного множеств и получил существенные результаты, относящиеся к структуре этих множеств на прямой (см. Исторический очерк к гл. IV); по этому поводу можно обратиться не только к сочинению Кантора (IV), но и к его весьма интересной переписке с Дедекиндом (V), где содержится также отчетливо выраженная идея числа измерений как топологического инварианта. Дальнейшее развитие этой теории изложено, например, в полуисторической, полусистематической форме в книге Шенф-

лиса (VI); пожалуй, наиболее важное значение имела теорема Бореля — Лебега, что всякое ограниченное замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ (см. гл. VI, § 1) удовлетворяет аксиоме (C''') § 9 (вначале доказанная Борелем для замкнутого отрезка на прямой и покрывающего его счетного семейства открытых интервалов).

Идеи Кантора встретили вначале довольно энергичную оппозицию (см. Исторический очерк к гл. I — IV книги I). Но во всяком случае его теория точечных множеств на прямой и плоскости вскоре стала применяться и широко распространяться французской и немецкой школами теории функций (Жордан, Пуанкаре, Клейн, Миттаг-Леффлер, затем Адамар, Борель, Бэр, Лебег и др.); в частности, каждый из первых томов коллекции Бореля содержал элементарное изложение этой теории (см., например, (VII)). По мере распространения этих идей у многих стала возникать мысль о возможном их применении к множествам уже не точек а кривых или функций. Эта мысль проявилась, например, в названии «О предельных кривых многообразия кривых» мемуара Асколи 1883 г. (VIII) и была высказана в сообщении Адамара на математическом конгрессе в Цюрихе в 1896 г. (IX); она тесно связана также с введением Вольтерра в 1887 г. «функций линии» и созданием «функционального исчисления», т. е. теории функций, аргументом которых является функция (отсылаем по этому поводу к монографии Вольтерра, посвященной функциональному анализу (X)).

С другой стороны, в знаменитом мемуаре (XI), где Гильберт, вновь обратившись к идее Римана, доказал существование минимума в принципе Дирихле и положил начало «прямым методам» вариационного исчисления, отчетливо выявился интерес, который представляет рассмотрение множеств функций, где применим принцип Больцано — Вейерштрасса, т. е. где всякая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность; к тому же такие множества начали играть важную роль не только в вариационном исчислении, но и в теории функций вещественной переменной (Асколи, Арчела), а несколько позже — в теории функций комплексной переменной (Витали, Каратеодори, Монтель).

Наконец, изучение функциональных уравнений и, особенно, решение Фредгольмом класса уравнений, получивших его имя, сделали привычным рассмотрение функции как аргумента, а множества функций — как множества точек, говоря о котором так же естественно пользоваться геометрическим языком, как и говоря о точках n-мерного евклидова пространства (которое и само ускользает от «интуиции» и по этой причине долгое время оставалось предметом недоверия многих математиков). В частности, известные работы Гильберта по интегральным уравнениям (XII) завершились определением и геометрическим изучением гильбертова пространства Э. Шмидтом (XIV) в полной аналогии с евклидовой геометрией.

Тем временем понятие аксиоматической теории приобретало все возрастающее значение главным образом благодаря многочисленным работам по основаниям геометрии, среди которых решающее влияние оказали исследования Гильберта (XIII); как раз в ходе самих этих исследований Гильберт

предложил в 1902 г. ((XIII), стр. 180 *)) первое аксиоматическое определение «двукратно протяженного многообразия» в смысле Римана, которое должно было бы служить, по его словам, «основой для строгого аксиоматического построения анализа положения», и уже использовал окрестности (в смысле, суженном требованиями проблемы, которой ограничился тогда Гильберт).

Первые попытки выделить то общее, что имеется в свойствах множеств точек и множеств функций, были сделаны Фреше (XV) и Ф. Риссом (XVI); однако первый, отправляясь от понятия счетного предела, не смог построить удобную и плодотворную систему аксиом; тем не менее он подметил родство между принципом Больцано — Вейерштрасса (который есть не что иное, как аксиома (C) § 9, ограничивающаяся счетными последовательностями) и теоремой Бореля — Лебега (т. е. аксиомой (C‴) § 9); именно в связи с этим он и ввел слово «компактность», правда, в несколько ином смысле, чем тот, который придается этому слову в настоящем сочинении. Что касается Ф. Рисса, который отправлялся от понятия точки сгущения (или, скорее,— что сводится к тому же — «производного» множества), то его теория была еще неполной, да, впрочем, и осталась лишь в виде чернового наброска.

Общей топологии, как ее понимают сейчас, положил начало Хаусдорф ((XVII), гл. 7—9). Вновь обратившись к понятию окрестности (но понимая под этим то, что в терминах настоящей книги следовало бы называть «открытой окрестностью»), Хаусдорф отобрал из аксиом Гильберта, относящихся к окрестностям на плоскости, те, которые смогли обеспечить его теории одновременно всю требуемую точность и общность. Аксиомами, принятыми им при этом за отправной пункт, были в основных чертах (с точностью до различий, обусловленных его понятием окрестности) аксиомы (V_I), (V_{II}), (V_{III}), (V_{IV}) § 1 и (H) § 8, а глава, в которой он развертывает их следствия, остается образцом аксиоматической теории, абстрактной, но заранее приспособленной к приложениям. Вполне естественно, что она послужила отправным пунктом для последующих исследований по общей топологии, и особенно для работ московской школы, группировавшихся большей частью вокруг проблемы метризации (см. Исторический очерк к гл. IX); здесь следует прежде всего отметить данное Александровым и Урысоном определение компактных пространств (под наименованием «бикомпактных пространств») и затем доказательство Тихоновым (XIX) компактности произведения компактных пространств. Наконец, введение А. Картаном (XX) фильтров, давшее чрезвычайно ценный инструмент для самых разнообразных приложений (где оно с успехом заменяет понятие «сходимости по Муру — Смиту» (XVIII)), позволило благодаря теореме об ультрафильтрах (теорема 1 § 6) завершить прояснение и упрощение всей теории.

*) Стр. 250 второго русского издания.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) C. F. Gauss, Werke, t. II, Göttingen, 1863.

(II) B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 2-е изд., Leipzig (Teubner), 1892. [Б. Риман, Сочинения, Гостехиздат, 1948.]

(III) B. Riemann, in Lettere di E. Betti a P. Tardy, Rend. Accad. Lincei (V), t. XXIV^1 (1915), стр. 517—519.

(IV) G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Berlin (Springer), 1932.

(V) G. Cantor, R Dedekind, Briefwechsel, Actual. Scient. et Ind., n° 518, Paris (Hermann), 1937.

(VI) A. Schoenflies, Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen, 1 часть, 2-е изд., Leipzig — Berlin (Teubner), 1913.

(VII) E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, 2-е изд., Paris (Gauthier — Villars), 1914.

(VIII) G. Ascoli, Le curve limiti di una varietà data di curve, Mem. Accad. Lincei (III), t. XVIII (1883), стр. 521—586.

(IX) J. Hadamard, Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles, Verhandl. Intern. Math.-Kongress, Zürich, 1898, стр. 201—202.

(X) V. Volterra, Theory of Functionals, London — Glasgow (Blackie & Son), 1930.

(XI) D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, t. III, Berlin (Springer), 1935, стр. 10—37 (=Jahresber. der D.M.V., t. VIII (1900), стр. 184, и Math. Ann., t. LIX (1904), стр. 161).

(XII) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, 2-е изд., Leipzig — Berlin (Teubner), 1924.

(XIII) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7-е изд., Leipzig — Berlin (Teubner), 1930. [Д. Гильберт, Основания геометрии, Перевод с 7-го изд., Гостехиздат, 1948.]

(XIV) E. Schmidt, Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rend. Palermo, t. XXV (1908), стр. 53—77.

(XV) M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Palermo, t. XXII (1906), стр. 1—74.

(XVI) F. Riesz, Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, Atti del IV Congresso Intern. dei Matem., Bologna, 1908, t. II, стр. 18—24.

(XVII) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1-е изд., Leipzig (Veit), 1914.

(XVIII) E. H. Moore and H. L. Smith, A general theory of limits, Amer. Journ. of Math., t. XLIV (1922), стр. 102—121.

(XIX) A. Tychonoff, Ueber die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann., t. CII (1930), стр. 544—561.

(XX) H. Cartan, Théorie des filtres; Filtres et ultrafiltres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. CCV (1937), стр. 595—598 и 777—779.

ГЛАВА II

РАВНОМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ

§ 1. Равномерные пространства

1. Определение равномерной структуры

Определение 1. *Равномерной структурой в множестве* X *называют структуру, определяемую заданием некоторого множества* $\mathfrak{U}$ *подмножеств произведения* $X \times X$, *удовлетворяющего аксиомам* (F_I) *и* (F_{II}) (гл. I, § 6, n° 1), *а также следующим аксиомам*:

(U_I) *Всякое множество из* $\mathfrak{U}$ *содержит диагональ* Δ (рис. 2).

(U_{II}) *Отношение* $V \in \mathfrak{U}$ *влечет* $V^{-1} \in \mathfrak{U}$.

(U_{III}) *Каково бы ни было* $V \in \mathfrak{U}$, *существует* $W \in \mathfrak{U}$ *такое, что* $W \circ W \subset V$.

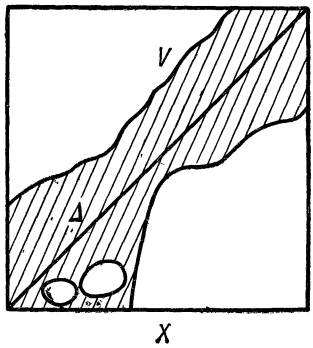

Рис. 2.

Множества из $\mathfrak{U}$ *называются окружениями равномерной структуры, определяемой в* X *этим* $\mathfrak{U}$.

Равномерным пространством называется множество, наделенное равномерной структурой.

Если V — окружение некоторой равномерной структуры в X, то отношение $(x, x') \in V$ выражают словами «x и x' близки порядка V».

Замечания. 1) Чтобы придать речи большую наглядность, можно в некоторых случаях употреблять выражения «x и y достаточно близки» и «x и y сколь угодно близки». Например, говорят, что отно-

шение $R\{x, y\}$ выполняется для всех *достаточно близких* x и y, если существует такое окружение V, что отношение $(x, y) \in V$ влечет $R\{x, y\}$.

2) Соединение аксиом (U_{II}) и (U_{III}) (с учетом остальных аксиом равномерных структур) равносильно следующей аксиоме:

(U_a) *Для любого* $V \in \mathfrak{U}$ *существует* $W \in \mathfrak{U}$ *такое, что* $W \circ \overset{-1}{W} \subset V$ *).

В самом деле, ясно, что (U_{II}) и (U_{III}) влекут (U_a). Обратно, если (U_a) выполнено, то $\overset{-1}{W} = \Delta \circ \overset{-1}{W} \subset V$ в силу (U_I); следовательно, $W \subset \overset{-1}{V}$, чем доказано (принимая во внимание (F_I)), что $\overset{-1}{V} \in \mathfrak{U}$; с другой стороны, если положить $W' = W \cap \overset{-1}{W}$, то согласно предыдущему и на основании (F_{II}) будем иметь $W' \in \mathfrak{U}$ и, значит, $W' \circ W' \subset W \circ \overset{-1}{W} \subset V$.

Всюду далее в этой главе мы вместо $V \circ V$ будем писать $\overset{2}{V}$ и вообще положим $\overset{n}{V} = \overset{n-1}{V} \circ V = V \circ \overset{n-1}{V}$ для каждого целого $n > 1$ и каждого $V \subset X \times X$.

3) Если X не пусто, то из аксиомы (U_I) вытекает, что никакое множество из $\mathfrak{U}$ не пусто, так что $\mathfrak{U}$ есть *фильтр* в $X \times X$. В пустом множестве имеется только одна равномерная структура, с множеством окружений $\mathfrak{U} = \{\varnothing\}$.

Определение 2. *Фундаментальной системой окружений равномерной структуры называется всякое множество* $\mathfrak{B}$ *окружений, обладающее тем свойством, что любое окружение содержит некоторое множество, принадлежащее* $\mathfrak{B}$.

Аксиома (U_{III}) показывает, что если n — какое-либо целое число > 0, то множества $\overset{n}{V}$, где V пробегает фундаментальную систему окружений, также образуют фундаментальную систему окружений.

Назовем *симметричными* такие окружения V равномерной структуры, для которых $V = \overset{-1}{V}$; для каждого окружения V множества $V \cap \overset{-1}{V}$ и $V \cup \overset{-1}{V}$ являются симметричными окружениями; аксиомы (F_{II}) и (U_{II}) показывают, что симметричные окружения образуют *фундаментальную систему окружений.*

*) Напомним (Теор. множ., Сводка результ., § 3, n°n° 4 и 10), что если V и W — подмножества из $X \times X$, то $V \circ W$ или VW означает множество тех пар $(x, y) \in X \times X$, для которых существует $z \in X$ такое, что $(x, z) \in W$ и $(z, y) \in V$, а $\overset{-1}{V}$ есть множество тех пар $(x, y) \in X \times X$, для которых $(y, x) \in V$.

Для того чтобы множество $\mathfrak{B}$ подмножеств произведения $X \times X$ было фундаментальной системой окружений некоторой равномерной структуры в X, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло аксиоме (B_I) (гл. I, § 6, n° 3) и следующим аксиомам:

(U'_I) *Всякое множество из* $\mathfrak{B}$ *содержит диагональ* Δ.

(U'_{II}) *Для любого* $V \in \mathfrak{B}$ *существует* $V' \in \mathfrak{B}$ *такое, что* $V' \subset \overset{-1}{V}$.

(U'_{III}) *Для любого* $V \in \mathfrak{B}$ *существует* $W \in \mathfrak{B}$ *такое, что* $\overset{2}{W} \subset V$.

Если X не пусто, фундаментальная система окружений равномерной структуры в X есть *базис* фильтра окружений этой структуры (гл. I, § 6, предложение 3).

Примеры равномерных структур. °1) Определим в множестве $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел равномерную структуру, называемую *аддитивной равномерной структурой*, следующим образом: для каждого $\alpha > 0$ рассмотрим в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ множество V_α тех пар (x, y) вещественных чисел, для которых $|x - y| < \alpha$; когда α пробегает множество всех вещественных чисел > 0, множества V_α образуют фундаментальную систему окружений аддитивной равномерной структуры в $\mathbf{R}$. Таким же образом определяется равномерная структура (также называемая *аддитивной структурой*) в множестве $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел; эти структуры, а также равномерные структуры, которые можно определить аналогичным образом в *группах*, изучаются в гл. III и IV.

2) Пусть X — множество, R — *отношение эквивалентности* в X и C — его график в $X \times X$. Как известно (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 1), $\Delta \subset C$ и $\overset{2}{C} = \overset{-1}{C} = C$; следовательно, множество подмножеств произведения $X \times X$, состоящее из *единственного* множества C, является фундаментальной системой окружений некоторой равномерной структуры в X. В частности, если принять за R отношение равенства, то $C = \Delta$, и окружениями соответствующей равномерной структуры служат тогда *все множества из* $X \times X$, *содержащие* Δ; эту равномерную структуру называют *дискретной* равномерной структурой в X, а множество X, наделенное ею,— *дискретным равномерным пространством*.

3) В множестве $\mathbf{Z}$ всех целых рациональных чисел следующим образом определяется равномерная структура, важная в теории чисел: пусть p — заданное простое число; обозначим через W_n, для каждого целого $n > 0$, множество тех пар $(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, в которых $x \equiv y \pmod{p^n}$; непосредственно проверяется, что эти множества образуют

фундаментальную систему окружений равномерной структуры в $\mathbf{Z}$; эту структуру называют *p-адической* (см. гл. III, 3-е изд., § 6, упражнения 23 и след., а также гл. IX, 2-е изд., § 3, n° 2).

В соответствии с общими определениями (Теор. множ., Сводка результ., § 8, n° 5), если X и X' — множества, наделенные равномерными структурами, с множествами окружений $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$, то биекция f множества X на X' будет *изоморфизмом* равномерной структуры в X на равномерную структуру в X', если $g(\mathfrak{U})=\mathfrak{U}'$, где $g=f\times f$.

Например, если X и X' — равномощные множества, то всякая биекция X на X' есть изоморфизм дискретной равномерной структуры в X на дискретную равномерную структуру в X'.

2. *Топология равномерного пространства*

Предложение 1. *Пусть X — множество, наделенное равномерной структурой $\mathscr{U}$. Для каждого $x\in X$ обозначим через $\mathfrak{V}(x)$ множество подмножеств $V(x)$ множества X, где V пробегает все окружения равномерной структуры $\mathscr{U}$; в X существует, и притом единственная, топология, для которой $\mathfrak{V}(x)$ является фильтром окрестностей точки x при любом $x\in X$.*

Требуется доказать, что множества $\mathfrak{V}(x)$ удовлетворяют условиям (V_I), (V_{II}), (V_{III}) и (V_{IV}) гл. I, § 1, n° 2. Для первых трех условий это сразу следует из того, что множество окружений равномерной структуры $\mathscr{U}$ удовлетворяет условиям (F_I), (F_{II}) и (U_I). С другой стороны, если V — какое-либо окружение из $\mathscr{U}$, а W — такое окружение из $\mathscr{U}$, что $\overset{2}{W}\subset V$, то $V(x)$ принадлежит $\mathfrak{V}(y)$ для каждого $y\in W(x)$: действительно, если $(x, y)\in W$ и $(y, z)\in W$, то $(x, z)\in \overset{2}{W}\subset V$ и, значит, $W(y)\subset V(x)$ для каждого $y\in W(x)$. Тем самым предложение полностью доказано.

Определение 3. *Топология, определенная в предложении* 1, *будет называться топологией, порождаемой равномерной структурой $\mathscr{U}$.*

Примеры. °1) Топология, порождаемая аддитивной равномерной структурой в множестве всех вещественных чисел, есть топология числовой прямой (гл. I, § 1, n° 2); точно так же топология, порождае-

мая аддитивной структурой в множестве всех рациональных чисел, есть топология рациональной прямой.

2) Топология, порождаемая в произвольном множестве X дискретной равномерной структурой (n° 1, пример 2), дискретна.

Говоря в дальнейшем о топологии равномерного пространства X, мы всегда будем иметь в виду, если не оговорено противное, топологию, порождаемую равномерной структурой этого пространства; топологическое пространство, получающееся при наделении множества X этой топологией, будет иногда называться *носителем* рассматриваемого равномерного пространства. Например, когда мы будем говорить, что равномерное пространство *отделимо*, или *компактно*, или *локально компактно* и т. д., то это будет означать, что этим свойством обладает топологическое пространство-носитель этого равномерного пространства.

Пусть X и X' — равномерные пространства; всякий изоморфизм f равномерной структуры пространства X на равномерную структуру пространства X' является также *гомеоморфизмом* X на X'; f называется изоморфизмом равномерного пространства X на равномерное пространство X'. Отметим, что гомеоморфизм X на X' не обязательно есть изоморфизм равномерной структуры пространства X на равномерную структуру пространства X'.

Другими словами, топологии, порождаемые двумя *различными* равномерными структурами в одном и том же множестве X, могут совпадать. Например, на $]0, +\infty[$ одна и та же топология порождается и *аддитивной* равномерной структурой, и *мультипликативной* равномерной структурой, которые различны (гл. III, 3-е изд., § 6, упражнение 17).

Другой пример см. в § 2, n° 2, замечание 1.

Предложение 2. *Пусть X — равномерное пространство. Для каждого симметричного окружения V его равномерной структуры и каждого множества $M \subset X \times X$ множество VMV есть окрестность M в топологическом произведении $X \times X$; замыкание множества M в этом пространстве задается формулой*

$$\overline{M} = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} VMV, \tag{1}$$

где $\mathfrak{S}$ *означает множество всех симметричных окружений для* X.

В самом деле, если V — симметричное окружение для X, то отношение $(x, y) \in VMV$ означает существование такого $(p, q) \in M$, что $(x, p) \in V$ и $(q, y) \in V$, иначе говоря (поскольку V симметрично), что $x \in V(p)$ и $y \in V(q)$ или, что то же, $(x, y) \in V(p) \times V(q)$. Поскольку $V(p) \times V(q)$ есть окрестность точки (p, q) в $X \times X$, этим доказано наше первое утверждение. Кроме того, отношения $(x, p) \in V$, $(y, q) \in V$ записываются также в виде $p \in V(x)$, $q \in V(y)$ или, что то же, $(p, q) \in V(x) \times V(y)$. Но когда V пробегает $\mathfrak{S}$, множества $V(x) \times V(y)$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки (x, y) в $X \times X$: действительно, для любых двух окружений U, U' всегда имеется симметричное окружение $V \subset U \cap U'$, откуда $V(x) \times V(y) \subset U(x) \times U'(y)$. Таким образом, утверждение, что $V(x) \times V(y)$ пересекается с M для каждого $V \in \mathfrak{S}$, равносильно утверждению, что $(x, y) \in \overline{M}$, откуда и следует формула (1).

Следствие 1. *Пусть* A *— любое множество из* X *и* V *— любое симметричное окружение для* X; *тогда* $V(A)$ *есть окрестность множества* A *в* X *и*

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} V(A) = \bigcap_{V \in \mathfrak{U}} V(A) \tag{2}$$

(*где* $\mathfrak{U}$ *— множество всех окружений для* X).

В самом деле, положив $M = A \times A$, будем иметь $VMV = V(A) \times V(A)$ для всех $V \in \mathfrak{S}$, ибо отношение «существует такое $p \in A$, что $(x, p) \in V$» по определению равносильно отношению $x \in V(A)$. Последнее утверждение следствия 1 вытекает отсюда в силу предложений 5 и 7 § 4 главы I.

$V(A)$ называется *окрестностью порядка* V множества A.

Если окружение V для X *открыто* в $X \times X$, то $V(x)$ открыто в X для каждого $x \in X$ (гл. I, § 4, следствие предложения 4) и, значит, $V(A)$, как объединение всех $V(x)$ $(x \in A)$, *открыто* в X. Напротив, если окружение V замкнуто в $X \times X$, то $V(A)$ не обязательно замкнуто в X для каждого множества A из X (упражнение 3).

С другой стороны, следует отметить, что множества $V(A)$, где V пробегает все окружения для X, не обязательно образуют фундаментальную систему окрестностей множества A в X (упражнение 2).

Следствие 2. *Внутренности* (соотв. *замыкания*) *в* $X \times X$ *окружений для* X *образуют фундаментальную систему окружений для* X.

В самом деле, если V — произвольное окружение для X, то существует такое симметричное окружение W, что $\overset{3}{W} \subset V$; поскольку $\overset{3}{W}$ — окрестность множества W (предложение 2), внутренность множества V в $X \times X$ содержит W и служит, таким образом, окружением для X. С другой стороны (предложение 2) имеем $W \subset \overline{W} \subset \overset{3}{W} \subset V$, так что V содержит замыкание окружения для X.

Следствие 3. *Всякое равномерное пространство удовлетворяет аксиоме* (O_{III}).

В самом деле, пусть V пробегает множество всех замкнутых в $X \times X$ окружений для X; в силу следствия 2, тогда множества $V(x)$ для каждого $x \in X$ образуют фундаментальную систему окрестностей x в X, а все $V(x)$ замкнуты в X (гл. I, § 4, следствие предложения 4).

Предложение 3. *Для того чтобы равномерное пространство* X *было отделимо, необходимо и достаточно, чтобы пересечение всех окружений его равномерной структуры совпадало с диагональю* Δ *произведения* $X \times X$. *Всякое отделимое равномерное пространство регулярно.*

Последнее утверждение непосредственно вытекает из следствия 3 предложения 2. Как мы видели, замкнутые окружения образуют фундаментальную систему окружений для X (следствие 2 предложения 2); следовательно, если их пересечение совпадает с Δ, то Δ замкнуто в $X \times X$, т. е. X отделимо (гл. I, § 8, предложение 1). Обратно, если X отделимо, то для каждой точки (x, y), не принадлежащей Δ, существует такое окружение V, что $y \notin V(x)$, т. е. $(x, y) \notin V$; тем самым Δ есть пересечение окружений для X.

Если равномерное пространство X отделимо, то его равномерную структуру называют *отделимой*. Пусть $\mathfrak{B}$ — фундаментальная система окружений этой структуры; для отделимости X необходимо и достаточно, чтобы пересечение всех множеств из $\mathfrak{B}$ совпадало с Δ.

Упражнения

1) Пусть X — бесконечное множество и $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр в X, пересечение всех множеств которого пусто. Обозначим через V_A для каждого $A \in \mathfrak{F}$ множество $\Delta \cup (A \times A)$ из $X \times X$. Показать, что множества V_A, где A пробегает $\mathfrak{F}$, образуют фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры $\mathcal{U}(\mathfrak{F})$ в X и что топология, порождаемая этой равномерной структурой, дискретна.

°2) Показать, что на числовой прямой $\mathbf{R}$, наделенной аддитивной равномерной структурой, окрестности $V(\mathbf{Z})$ множества $\mathbf{Z}$ всех целых рациональных чисел не образуют фундаментальной системы его окрестностей, когда V пробегает фильтр окружений для $\mathbf{R}$. [См. § 4, следствие предложения 4.]

°3) Пусть V — окружение аддитивной равномерной структуры в $\mathbf{R}$, образованное теми парами (x, y), в которых $|x - y| \leqslant 1$ или $xy \geqslant 1$. Показать, что V замкнуто в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, но $V(A)$, где A — (замкнутое в $\mathbf{R}$) множество всех целых $n \geqslant 2$, не замкнуто в $\mathbf{R}$.

4) Показать, что если равномерное пространство — колмогоровское (гл. I, § 1, упражнение 2), то оно отделимо.

*5) а) Пусть X — равномерное пространство и $\mathcal{U}$ — его равномерная структура; для любого ее окружения V обозначим через $\tilde{V}$ подмножество произведения $\mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$, образованное теми парами (M, N) множеств из X, для которых *одновременно* $M \subset V(N)$ и $N \subset V(M)$. Показать, что множества $\tilde{V}$ образуют фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры $\tilde{\mathcal{U}}$ в $\mathfrak{P}(X)$.

б) Показать, что в множестве $\mathfrak{P}_0(X)$ всех непустых множеств из X топология, индуцируемая топологией $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}})$, которую порождает $\tilde{\mathcal{U}}$, мажорирует топологию $\mathcal{T}_\Phi$ (гл. I, § 2, упражнение 7).

в) Показать, что если X содержит хотя бы две различные точки и $\mathcal{U}$ отделима, то топология, индуцируемая в $\mathfrak{P}_0(X)$ топологией $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}})$, не может мажорироваться топологией $\mathcal{T}_\Omega$. Для того чтобы топология, которую индуцирует $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}})$ в множестве $\mathfrak{F}(X)$ всех непустых замкнутых множеств из X, мажорировала топологию, которую индуцирует $\mathcal{T}_\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого множества A из X множества $V(A)$, где V пробегает все окружения из $\mathcal{U}$, образовывали фундаментальную систему окрестностей для A.

°г) Показать, что в фактормножестве X/R, определенном в упражнении 18 § 11 гл. I, топология $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}})$ совпадает с $\mathcal{T}_\Phi$ (и, значит, отлична от $\mathcal{T}_\Omega$ и фактортопологии). Показать, что в множестве всех прямых в $\mathbf{R}^2$, проходящих через 0, $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}})$ сильнее, чем $\mathcal{T}_{\mathcal{U}^\circ}$

§ 2. Равномерно непрерывные функции

1. Равномерно непрерывные функции

Определение 1. *Говорят, что отображение f равномерного пространства X в равномерное пространство X' равномерно непрерывно, если для любого окружения V' равномерной структуры пространства X' существует окружение V равномерной структуры пространства X такое, что $(x, y) \in V$ влечет $(f(x), f(y)) \in V'$.*

Нагляднее это можно выразить, сказав, что функция f равномерно непрерывна, если ее значения в двух точках сколь угодно близки, как только эти точки достаточно близки.

Положим $g = f \times f$; определение 1 означает тогда, что *прообраз $g^{-1}(V')$ любого окружения V' для пространства X' есть окружение для X.*

Примеры. 1) Тождественное отображение равномерного пространства на себя равномерно непрерывно.

2) Постоянное отображение равномерного пространства в равномерное пространство равномерно непрерывно.

3) Всякое отображение дискретного равномерного пространства в равномерное пространство равномерно непрерывно.

Предложение 1. *Всякое равномерно непрерывное отображение непрерывно.*

Это — непосредственное следствие определений.

Напротив, непрерывное отображение равномерного пространства X в равномерное пространство X' не обязательно равномерно непрерывно, как это показывает пример $x \longmapsto x^3$ *гомеоморфизма* пространства $\mathbf{R}$ на себя, не являющегося равномерно непрерывным при наделении $\mathbf{R}$ аддитивной равномерной структурой. (См. § 4, теорема 2.)

Предложение 2. 1° *Если $f\colon X \to X'$ и $g\colon X' \to X''$ — равномерно непрерывные отображения, то $g \circ f\colon X \to X''$ равномерно непрерывно.*

2° *Для того чтобы биекция f равномерного пространства X на равномерное пространство X' была изоморфизмом, необходимо и*

достаточно, чтобы f и обратная ей биекция g были равномерно непрерывны.

Это непосредственно следует из интерпретации определения 1 в терминах произведения отображений $f \times f$.

2. Сравнение равномерных структур

Предложение 2 показывает, что за *морфизмы* равномерных структур можно принять равномерно непрерывные отображения (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 1); в дальнейшем будет всегда предполагаться, что сделан этот выбор морфизмов. В соответствии с общими определениями (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 2), это позволяет определить *отношение порядка* в множестве всех равномерных структур в одном и том же множестве X:

Определение 2. *Пусть $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — равномерные структуры в одном и том же множестве X; мы будем говорить, что $\mathcal{U}_1$ мажорирует $\mathcal{U}_2$ (или что $\mathcal{U}_2$ минорирует $\mathcal{U}_1$), если тождественное отображение $X_1 \to X_2$, где X_i означает множество X, наделенное равномерной структурой $\mathcal{U}_i$ $(i=1, 2)$, равномерно непрерывно.*

Если $\mathcal{U}_1$ мажорирует $\mathcal{U}_2$ и отлично от $\mathcal{U}_2$, то будем говорить, что $\mathcal{U}_1$ *сильнее*, чем $\mathcal{U}_2$ (или что $\mathcal{U}_2$ *слабее*, чем $\mathcal{U}_1$).

Две равномерные структуры, из которых одна мажорирует другую, называются *сравнимыми*.

Пример. В упорядоченном множестве всех равномерных структур в множестве X дискретная равномерная структура — *сильнейшая*, а равномерная структура, множество окружений которой состоит из единственного элемента $X \times X$, — *слабейшая*.

Из определения 1 непосредственно следует:

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — равномерные структуры в множестве X; для того чтобы $\mathcal{U}_1$ мажорировала $\mathcal{U}_2$, необходимо и достаточно, чтобы всякое окружение из $\mathcal{U}_2$ было окружением в $\mathcal{U}_1$.*

Следствие. *Пусть $\mathcal{U}_1$ — равномерная структура в множестве X, мажорирующая равномерную структуру $\mathcal{U}_2$; тогда и топология, которую порождает $\mathcal{U}_1$, мажорирует топологию, которую порождает $\mathcal{U}_2$.*

Это сразу следует из сравнения топологий с помощью окрестностей (гл. I, § 2, предложение 3).

Замечания. 1) Может случиться, что равномерная структура $\mathcal{U}_1$ *сильнее* равномерной структуры $\mathcal{U}_2$, но порождаемые ими топологии *совпадают*. Это показывает следующий пример.

Пусть X — непустое множество; для каждого его *конечного разбиения* $\omega = (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ положим $V_\omega = \bigcup_i (A_i \times A_i)$; множества V_ω образуют *фундаментальную систему окружений* некоторой равномерной структуры $\mathcal{U}$ в X: в самом деле, для любого конечного разбиения ω имеем $\Delta \subset V_\omega$ и $V_\omega \circ V_\omega = V_\omega^{-1} = V_\omega$ (§ 1, n° 1, пример 2); с другой стороны, если $\omega' = (B_j)$ и $\omega'' = (C_k)$ — конечные разбиения множества X, то те из пересечений $B_j \cap C_k$, которые не пусты, образуют разбиение ω множества X, и $V_\omega \subset V_{\omega'} \cap V_{\omega''}$. $\mathcal{U}$ называется *равномерной структурой конечных разбиений* в X. Топология, порождаемая этой равномерной структурой, *дискретна*, ибо $\{x\}$ и $\complement\{x\}$ для каждого $x \in X$ образуют конечное разбиение множества X. Однако ясно, что если X бесконечно, то $\mathcal{U}$ *слабее*, чем дискретная равномерная структура.

2) Равномерно непрерывное отображение $f: X \to X'$ остается равномерно непрерывным, если равномерную структуру в X заменить *мажорирующей* ее равномерной структурой, а равномерную структуру в X' — *минорирующей* (предложение 2). Иначе говоря, чем *сильнее* равномерная структура в X и чем *слабее* равномерная структура в X', тем *больше* равномерно непрерывных отображений X в X'.

3. Инициальные равномерные структуры

Предложение 4. *Пусть X — множество, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство равномерных пространств и f_ι для каждого $\iota \in I$ — отображение X в Y_ι; положим $g_\iota = f_\iota \times f_\iota$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех подмножеств произведения $X \times X$, имеющих вид $g_\iota^{-1}(V_\iota)$ ($\iota \in I$,*

V_ι — окружение для Y_ι), и пусть $\mathfrak{B}$ — множество пересечений

$$U(V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n}) = \overset{-1}{g}_{\iota_1}(V_{\iota_1}) \cap \ldots \cap \overset{-1}{g}_{\iota_n}(V_{\iota_n}) \tag{1}$$

всевозможных конечных наборов множеств из $\mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{B}$ есть фундаментальная система окружений равномерной структуры $\mathcal{U}$ в X, являющейся инициальной равномерной структурой в X относительно семейства (f_ι) (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 3) *и, в частности, слабейшей из равномерных структур в X, при которых все f_ι равномерно непрерывны. Другими словами, для того чтобы отображение h какого-либо равномерного пространства Z в X было равномерно непрерывно (когда X наделено равномерной структурой $\mathcal{U}$), необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций $f_\iota \circ h$ была равномерно непрерывна.*

Ясно, что $\mathfrak{B}$ удовлетворяет аксиомам (B_1) и (U_1'); если $W_\iota = \overset{-1}{g}_\iota(V_\iota)$, то $\overset{-1}{W}_\iota = \overset{-1}{g}_\iota\left(\overset{-1}{V}_\iota\right)$ и $\overset{2}{W}_\iota \subset \overset{-1}{g}_\iota\left(\overset{2}{V}_\iota\right)$, так что $\mathfrak{B}$ удовлетворяет также аксиомам (U_{II}') и (U_{III}') и, следовательно, является фундаментальной системой окружений некоторой равномерной структуры $\mathcal{U}$ в X. При этом из определения этой структуры $\mathcal{U}$ и определения 1 сразу вытекает равномерная непрерывность f_ι для каждого $\iota \in I$; следовательно (предложение 2), равномерная непрерывность $h\colon Z \to X$ влечет равномерную непрерывность $f_\iota \circ h$ для всех $\iota \in I$.

Обратно, пусть $f_\iota \circ h$ равномерно непрерывно для каждого $\iota \in I$; рассмотрим множество $U(V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n})$; по предположению при каждом k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ существует окружение W_k для Z такое, что $(z, z') \in W_k$ влечет $(f_{\iota_k}(h(z)), f_{\iota_k}(h(z'))) \in V_k$; если z и z' близки порядка W, где $W = \bigcap_k W_k$, то n последних отношений выполняются одновременно, и тогда $(h(z), h(z')) \in U(V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n})$, чем доказательство и завершается.

Следствие. *Топология в X, порождаемая слабейшей из равномерных структур, при которых равномерно непрерывны все f_ι, есть слабейшая из топологий, при которых непрерывны все f_ι.*

Это непосредственно вытекает из определения окрестностей точки в этой последней топологии (гл. I, § 2, предложение 4).

Общие свойства инициальных структур (Теор. множ., гл. IV, § 2, n° 3, критерий CST 10) влекут, в частности, следующее свойство *транзитивности*:

Предложение 5. *Пусть X — множество, $(Z_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство равномерных пространств, $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — разбиение множества I, $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство множеств, имеющее L своим множеством индексов. Пусть, далее, h_λ для каждого $\lambda \in L$ — отображение X в Y_λ, $g_{\iota\lambda}$ для каждого $\lambda \in L$ и каждого $\iota \in J_\lambda$ — отображение Y_λ в Z_ι и $f_\iota = g_{\iota\lambda} \circ h_\lambda$. Наделим каждое из Y_λ слабейшей из равномерных структур, при которых равномерно непрерывны все $g_{\iota\lambda}$ $(\iota \in J_\lambda)$; тогда слабейшая из равномерных структур в X, при которых равномерно непрерывны все f_ι, совпадает со слабейшей из равномерных структур, при которых равномерно непрерывны все h_λ.*

4. Прообраз равномерной структуры. Равномерные подпространства

Пусть X — множество, Y — равномерное пространство и f — отображение X в Y; слабейшая равномерная структура $\mathcal{U}$ в X, при которой f равномерно непрерывно, называется *прообразом* относительно f равномерной структуры пространства Y. Из предложения 4 и формул, дающих прообраз пересечения, вытекает, что прообразы относительно $g = f \times f$ окружений для Y уже сами образуют фундаментальную систему окружений равномерной структуры $\mathcal{U}$. Топология, которую порождает $\mathcal{U}$, является тогда *прообразом* относительно f топологии пространства Y (следствие предложения 4).

Замечание. Если $f: X \to Y$ *сюръективно*, то окружения пространства Y являются тогда *образами* при g окружений пространства X.

Для того чтобы отображение f равномерного пространства X в равномерное пространство X' было равномерно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы прообраз относительно f равномерной структуры пространства X' *мажорировался* равномерной структурой пространства X.

Пусть A — множество в равномерном пространстве X; *равномерной структурой, индуцируемой* в A равномерной структурой пространства X, называется прообраз этой последней относительно канонической инъекции $A \to X$; то же самое (см. предложение 4) можно выразить следующим определением:

Определение 3. *Пусть A — подмножество равномерного пространства X. Равномерной структурой, индуцируемой в A равномерной структуры пространства X, называется равномерная структура, множеством окружений которой служит след на $A \times A$ множества окружений для X.*

Топология, порождаемая в A индуцированной равномерной структурой, совпадает с топологией, индуцируемой в A из X; A, наделенное индуцированными из X равномерной структурой и топологией, называется *равномерным подпространством пространства X*.

Если A — множество в равномерном пространстве X и $f: X \to X'$ — равномерно непрерывное отображение, то сужение $f|A$ есть равномерно непрерывное отображение пространства A в X'. Если $A' \subset X'$ таково, что $f(X) \subset A'$, то отображение пространства X в равномерное подпространство A' пространства X', имеющее тот же график, что и f, также будет равномерно непрерывным (предложение 4).

Если $B \subset A \subset X$, то равномерное подпространство B пространства X совпадает с равномерным подпространством B равномерного подпространства A пространства X (*транзитивность* индуцированных равномерных структур; предложение 5).

Предложение 6. *Пусть A — всюду плотное множество в равномерном пространстве X; замыкания в $X \times X$ окружений равномерного подпространства A образуют фундаментальную систему окружений пространства X.*

В самом деле, $A \times A$ плотно в $X \times X$ (гл. I, § 4, предложение 7). Пусть V — открытое окружение для A, след на $A \times A$ открытого окружения U для X; тогда $U \subset \overline{V}$ (гл. I, § 1, предложение 5), что, в соединении с $\overline{V} \subset \overline{U}$, доказывает справедливость предложения, если принять во внимание следствие 2 предложения 2 § 1.

5. *Верхняя грань множества равномерных структур*

Всякое семейство $(\mathcal{U}_\iota)_{\iota \in I}$ равномерных структур в множестве X обладает *верхней гранью* $\mathcal{U}$ в упорядоченном множестве всех равномерных структур в X: действительно, достаточно применить предложение 4, обозначив через Y_ι множество X, наделенное равномерной структурой $\mathcal{U}_\iota$, и через f_ι — тождественное отображение $X \to Y_\iota$; топология, которую порождает $\mathcal{U}$, есть тогда не что иное, как *верхняя грань* топологий, которые порождают $\mathcal{U}_\iota$. Кроме того, из предложения 4 вытекает, что если $X \neq \varnothing$, то фильтр окружений равномерной структуры $\mathcal{U}$ является *верхней гранью* фильтров окружений $\mathfrak{U}_\iota$ равномерных структур $\mathcal{U}_\iota$ (гл. I, § 6, n° 2).

Пример. Для каждого конечного разбиения $\omega = (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ непустого множества X уже одно множество $V_\omega = \bigcup_i (A_i \times A_i)$ образует фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры $\mathcal{U}_\omega$ в X (§ 1, n° 1, пример 2); равномерная структура конечных разбиений в X (n° 2, замечание 1) есть *верхняя грань* равномерных структур $\mathcal{U}_\omega$.

Замечание. Всякое семейство $(\mathcal{U}_\iota)$ равномерных структур в X имеет также *нижнюю грань* в множестве всех равномерных структур в X, а именно, верхнюю грань равномерных структур, мажорируемых всеми $\mathcal{U}_\iota$ (существующих, поскольку множество всех равномерных структур в X обладает наименьшим элементом). Однако (предполагая $X \neq \varnothing$) фильтр окружений этой равномерной структуры не обязательно является пересечением фильтров окружений равномерных структур $\mathcal{U}_\iota$, ибо это пересечение может не удовлетворять аксиоме $(\mathrm{U_{III}})$ (упражнение 4).

6. *Произведение равномерных пространств*

Определение 4. *Произведением семейства* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *равномерных пространств называют множество* $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$, *наделенное слабейшей из равномерных структур, при которых все проекции* $\mathrm{pr}_\iota : X \to X_\iota$ *равномерно непрерывны. Эта равномерная структура называется*

произведением равномерных структур пространств X_ι, а равномерные пространства X_ι — пространствами-сомножителями.

Топология в X, порождаемая произведением равномерных структур пространств X_ι, совпадает с произведением топологий пространств X_ι (следствие предложения 4).

Предложение 7. *Пусть $f=(f_\iota)$ — отображение равномерного пространства Y в произведение $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$ равномерных пространств X_ι. Для того чтобы f было равномерно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы f_ι было равномерно непрерывно для каждого $\iota\in I$.*

Поскольку $f_\iota=\mathrm{pr}_\iota\circ f$, это — частный случай предложения 4.

Следствие. *Пусть $(X_\iota)_{\iota\in I}$ и $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — семейства равномерных пространств с одним и тем же множеством индексов I и f_ι для каждого $\iota\in I$ — отображение X_ι в Y_ι. Если каждое f_ι равномерно непрерывно, то и их произведение $f\colon (x_\iota)\mapsto(f_\iota(x_\iota))$ равномерно непрерывно. Обратно, если X_ι не пусты и f равномерно непрерывно, то и каждое из f_ι равномерно непрерывно.*

В самом деле, f представимо в виде $x\mapsto(f_\iota(\mathrm{pr}_\iota x))$, так что первое утверждение вытекает из предложения 7. Для доказательства второго рассматриваем точку $a=(a_\iota)$ из $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ и повторяем рассуждения, проведенные при доказательстве следствия 1 предложения 1 § 4 гл. I, с заменой слов «непрерывно в точке a (соотв. $a_\varkappa$)» словами «равномерно непрерывно».

Общий критерий транзитивности инициальных равномерных структур (предложение 5) показывает, что, как и произведение топологических пространств (гл. I, § 4, n° 1), произведение равномерных пространств *ассоциативно* и обладает следующим свойством:

Предложение 8. *Пусть X — множество, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство равномерных пространств и f_ι для каждого $\iota\in I$ — отображение X в Y_ι.*

Пусть, далее, f *— отображение* $x \mapsto (f_\iota(x))$ *множества* X *в* $Y = \prod_{\iota \in I} Y_\iota$ *и* $\mathcal{U}$ *— слабейшая из равномерных структур в* X*, при которых равномерно непрерывны все* f_ι*. Тогда* $\mathcal{U}$ *есть прообраз относительно* f *равномерной структуры, индуцируемой в* $f(X)$ *равномерной структурой произведения* Y*.*

Следствие. *Пусть* A_ι *для каждого* $\iota \in I$ *— подпространство пространства* Y_ι*. Равномерная структура, индуцируемая в* $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ *равномерной структурой произведения* $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$*, есть произведение равномерных структур подпространств* A_ι*.*

Кроме того, сразу видно, что если X_1 и X_2 — равномерные пространства и a_1 — произвольная точка из X_1, то отображение $x_2 \mapsto (a_1, x_2)$ есть изоморфизм пространства X_2 на подпространство $\{a_1\} \times X_2$ произведения $X_1 \times X_2$. Отсюда:

Предложение 9. *Пусть* f *— равномерно непрерывное отображение произведения равномерных пространств* $X_1 \times X_2$ *в равномерное пространство* Y*; тогда всякое частичное отображение* $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ *пространства* X_2 *в* Y *равномерно непрерывно.*

Это предложение можно выразить еще, сказав, что равномерно непрерывная функция двух аргументов равномерно непрерывна по каждому из них.

° Пример, приведенный в гл. I, § 4, n° 2, замечание 2, показывает, что обратное предложение неверно. ◦

7. *Проективные пределы равномерных пространств*

Пусть I — предупорядоченное множество с отношением предпорядка $\alpha \leqslant \beta$. Пусть, далее, X_α для каждого $\alpha \in I$ — равномерное пространство и $f_{\alpha\beta}$ для каждой пары α, β такой, что $\alpha \leqslant \beta$, — отображение X_β в X_α. Будем называть $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *проективной системой равномерных пространств*, если: 1° $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *есть проективная*

система множеств (см. n° 1 Приложения к гл. I); 2° *все* $f_{\alpha\beta}$ *равномерно непрерывны. Слабейшая* из равномерных структур в $X = \varprojlim X_\alpha$, *при которых равномерно непрерывны* все канонические отображения $f_\alpha\colon X \to X_\alpha$, называется *проективным пределом* (относительно отображений $f_{\alpha\beta}$) равномерных структур пространств X_α, а множество X, наделенное этой равномерной структурой, — *проективным пределом проективной системы равномерных пространств* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$. Все свойства проективных пределов топологических пространств, установленные в n° 4 § 4 гл. I (за исключением предложения 9), остаются в силе, если «топологию» заменить «равномерной структурой», а «непрерывное отображение» — «равномерно непрерывным отображением»; кроме того, справедливо

Предложение 10. *Пусть* I *— фильтрующееся предупорядоченное множество,* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *— проективная система равномерных пространств, имеющая* I *своим множеством индексов, и* J *— кофинальная часть* I. *Пусть, далее,* f_α *для каждого* $\alpha \in I$ *— каноническое отображение пространства* $X = \varprojlim X_\alpha$ *в* X_α *и* $g_\alpha = f_\alpha \times f_\alpha$. *Семейство множеств* $g_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, *где* α *пробегает* J, *а* V_α *при каждом* $\alpha \in J$ *пробегает фундаментальную систему окружений для* X_α, *есть фундаментальная система окружений для* X.

Мы предоставляем читателю доказательство, являющееся очевидной перефразировкой доказательства предложения 9 § 4 гл. I.

Отметим, наконец, что топология в $X = \varprojlim X_\alpha$, порожденная равномерной структурой, являющейся проективным пределом равномерных структур пространств X_α, совпадает с проективным пределом топологий этих пространств.

Упражнения

°1) На числовой прямой $\mathbf{R}$ (наделенной аддитивной равномерной структурой) функция $|x|$ равномерно непрерывна; функция $1/x$ равномерно непрерывна на всяком интервале $[a, +\infty[$, где $a > 0$; она непрерывна, но не равномерно непрерывна на интервале $]0, +\infty[$.

2) Показать, что топологии в $\mathbf{Z}$, порождаемые p-адическими структурами, соответствующими двум различным простым числам, несравнимы.

3) Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — два различных нетривиальных ультрафильтра в бесконечном множестве X; показать, что равномерные структуры $\mathcal{U}(\mathfrak{F}_1)$ и $\mathcal{U}(\mathfrak{F}_2)$ (§ 1, упражнение 1) несравнимы и что их верхней гранью служит дискретная равномерная структура; какова их нижняя грань? Вывести отсюда, что множество всех отделимых равномерных структур в X равномощно с $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$. [См. гл. I, § 8, упражнение 6а.]

4) а) Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$ — фильтры окружений двух равномерных структур в одном и том же непустом множестве X; для того чтобы пересечение фильтров $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$ было фильтром окружений некоторой равномерной структуры в X, необходимо и достаточно, чтобы для любых $V \in \mathfrak{U}$ и $V' \in \mathfrak{U}'$ существовали $W \in \mathfrak{U}$ и $W' \in \mathfrak{U}'$ такие, что $WW' \subset V \cup V'$.

б) Дать пример двух фильтров окружений $\mathfrak{U}_\omega$ и $\mathfrak{U}_{\omega'}$, определенных каждый посредством некоторого конечного разбиения множества X (n° 5, пример), которые не удовлетворяли бы условию а).

5) Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство равномерных пространств и $\mathfrak{c}$ — бесконечное кардинальное число. Сопоставим каждому семейству $(V_\iota)_{\iota \in H}$, где $\mathrm{Card}(H) < \mathfrak{c}$ и V_ι при любом $\iota \in H$ есть окружение для X_ι, множество $U((V_\iota))$ тех пар (x, y) точек из $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$, для которых $(\mathrm{pr}_\iota x, \mathrm{pr}_\iota y) \in V_\iota$ при каждом $\iota \in H$. Показать, что множества $U((V_\iota))$ образуют фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры в X; топология, порождаемая этой равномерной структурой, совпадает с топологией, определенной в упражнении 9 § 4 гл. I.

6) Пусть X — равномерное пространство, $\mathcal{U}$ — его равномерная структура и $\tilde{\mathcal{U}}$ — соответствующая равномерная структура в $\mathfrak{P}_0(X)$ (§ 1, упражнение 5).

а) Показать, что отображение $x \longmapsto \{x\}$ есть изоморфизм равномерного пространства X на некоторое подпространство равномерного пространства $\mathfrak{P}_0(X)$.

б) Показать, что равномерная структура, которую $\tilde{\mathcal{U}}$ индуцирует в множестве $\mathfrak{F}(X)$ всех непустых замкнутых множеств из X, отделима и что $\tilde{\mathcal{U}}$ есть прообраз относительно отображения $M \longmapsto \overline{M}$ структуры, которую $\tilde{\mathcal{U}}$ индуцирует в $\mathfrak{F}(X)$.

в) Показать, что отображение $(M, N) \longmapsto M \cup N$ произведения $\mathfrak{P}_0(X) \times \mathfrak{P}_0(X)$ в $\mathfrak{P}_0(X)$ равномерно непрерывно.

г) Пусть Y — еще одно равномерное пространство. Показать, что если $f: X \to Y$ — равномерно непрерывное отображение, то отображение $M \longmapsto f(M)$ пространства $\mathfrak{P}_0(X)$ в $\mathfrak{P}_0(Y)$ равномерно непрерывно.

д) Пусть $\mathfrak{B}$ — компактное подмножество множества $\mathfrak{F}(X)$ всех непустых замкнутых множеств из X, наделенное топологией, индуцированной топологией $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{U}})$, которую $\mathcal{U}$ порождает в $\mathfrak{F}(X)$. Показать, что множество $\bigcup_{M \in \mathfrak{B}} M$ замкнуто в X.

§ 3. Полные пространства

1. Фильтры Коши

В множестве X, наделенном равномерной структурой, можно определить то, что понимают под «малым» (относительно данной структуры) подмножеством: это — такое множество, все точки которого «очень близки» друг к другу. Точнее это означает следующее:

Определение 1. *Пусть X — равномерное пространство и V — некоторое окружение его равномерной структуры; если любые две точки из $A \subset X$ близки порядка V* (или, что равносильно этому, $A \times A \subset V$), *то говорят, что множество A мало порядка V.*

Предложение 1. *Если в равномерном пространстве X множества A и B малы порядка V и пересекаются, то их объединение $A \cup B$ мало порядка $\overset{2}{V}$.*

В самом деле, пусть x и y — любые две точки из $A \cup B$ и z — точка из $A \cap B$; так как, по предположению, $(x, z) \in V$ и $(z, y) \in V$, то $(x, y) \in \overset{2}{V}$.

Определение 2. *Фильтр $\mathfrak{F}$ в равномерном пространстве X называется фильтром Коши, если для любого окружения V равномерной структуры пространства X существует множество, малое порядка V и принадлежащее $\mathfrak{F}$.*

И здесь можно придать речи бóльшую наглядность, используя выражения «достаточно малое множество» и «сколь угодно малое множество»; например, определение 2 можно также выразить, сказав, что фильтр Коши — это фильтр, *содержащий сколь угодно малые множества.*

Бесконечная последовательность (u_n) точек равномерного пространства X называется *последовательностью Коши*, если ассоциированный с ней элементарный фильтр есть фильтр Коши. Другими словами, для любого окружения V пространства X существует такое n_0, что $(u_m, u_n) \in V$, каковы бы ни были $m \geqslant n_0$ и $n \geqslant n_0$.

Предложение 2. *В равномерном провтранстве X всякий сходящийся фильтр есть фильтр Коши.*

В самом деле, для каждой точки $x \in X$ и каждого симметричного окружения V равномерной структуры пространства X окрестность $V(x)$ точки x мала порядка $\overset{2}{V}$; если $\mathfrak{F}$ — фильтр, сходящийся к x, то в нем существует множество, содержащееся в $V(x)$ и, значит, малое порядка $\overset{2}{V}$.

Ясно, что всякий фильтр, *мажорирующий* фильтр Коши, также есть фильтр Коши.

Предложение 3. *Пусть $f\colon X \to X'$ — равномерно непрерывное отображение. Образ при f базиса фильтра Коши из X есть базис фильтра Коши в X'.*

В самом деле, пусть $g = f \times f$; если V' — окружение для X', то $\overset{-1}{g}(V')$ — окружение для X, и образ при f множества, малого порядка $\overset{-1}{g}(V')$, есть множество, малое порядка V', чем предложение и доказано.

В частности, отсюда следует, что если заменить равномерную структуру равномерного пространства X *мажорируемой* ею равномерной структурой, то всякий фильтр, являвшийся фильтром Коши при исходной равномерной структуре, останется фильтром Коши и при новой равномерной структуре.

Этот факт удобно запомнить в следующей форме: *чем равномерная структура сильнее, тем меньше фильтров Коши.*

Предложение 4. *Пусть X — множество, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство равномерных пространств и f_ι для каждого $\iota \in I$ — отображение X в Y_ι. Наделим X слабейшей равномерной структурой $\mathcal{U}$, при которой все f_ι равномерно непрерывны. Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}$ в X был базисом фильтра Коши, необходимо и достаточно, чтобы $f_\iota(\mathfrak{B})$ было базисом фильтра Коши в Y_ι для каждого $\iota \in I$.*

Условие необходимо в силу предложения 3. Обратно, предположим, что оно выполнено, и пусть $U(V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n})$ — окружение

равномерной структуры $\mathcal{U}$ (§ 2, n° 3, формула (1)). По предположению, для каждого индекса k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ существует множество $M_k \in \mathfrak{B}$ такое, что $f_{\iota_k}(M_k)$ мало порядка V_{ι_k}; пусть M — множество из $\mathfrak{B}$, содержащееся во всех M_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$; тогда для любой пары точек x, x' из M будем иметь $(f_{\iota_k}(x), f_{\iota_k}(x')) \in V_{\iota_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и, следовательно, $(x, x') \in U(V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n})$, чем предложение доказано.

Следствие 1. *Если фильтр Коши в равномерном пространстве X индуцирует фильтр в множестве $A \subset X$, то этот последний есть фильтр Коши в равномерном подпространстве A.*

Следствие 2. *Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}$ в произведении равномерных пространств $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ был базисом фильтра Коши, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{pr}_\iota(\mathfrak{B})$ *было базисом фильтра Коши в X_ι для каждого $\iota \in I$.*

2. Минимальные фильтры Коши

Минимальные (по включению) элементы множества всех фильтров Коши в равномерном пространстве X называются *минимальными фильтрами Коши* в X.

Предложение 5. *Пусть X — равномерное пространство. Для каждого фильтра Коши $\mathfrak{F}$ в X существует, и притом единственный, минимальный фильтр Коши $\mathfrak{F}_0$, мажорируемый фильтром $\mathfrak{F}$; пусть $\mathfrak{B}$ — базис фильтра $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}$ — фундаментальная система окружений для X; тогда множества $V(M)$ $(M \in \mathfrak{B}, V \in \mathfrak{S})$ образуют базис фильтра $\mathfrak{F}_0$.*

Пусть M и M' — любые множества из $\mathfrak{B}$, а V и V' — из $\mathfrak{S}$; тогда в $\mathfrak{B}$ (соотв. в $\mathfrak{S}$) существует M'' (соотв. V'') такое, что $M'' \subset M \cap M'$ (соотв. $V'' \subset V \cap V'$), откуда $V''(M'') \subset V(M) \cap V'(M')$; таким образом, множества $V(M)$ $(M \in \mathfrak{B}, V \in \mathfrak{S})$ действительно образуют базис некоторого фильтра $\mathfrak{F}_0$ в X. При этом, если M мало порядка V, то $V(M)$ мало порядка $\overset{3}{V}$, так что $\mathfrak{F}_0$ есть фильтр Коши в X, очевидно, мажорируемый фильтром $\mathfrak{F}$. Для завершения доказательства достаточно установить, что всякий фильтр Коши $\mathfrak{G}$, мажорируемый фильтром $\mathfrak{F}$, мажорирует $\mathfrak{F}_0$. Но действительно, пусть $M \in \mathfrak{B}$

и $V \in \mathfrak{S}$; существует множество $N \in \mathfrak{G}$, которое мало порядка V; так как $N \in \mathfrak{F}$, то N пересекается с M; следовательно, $N \subset V(M)$ и, значит, $V(M) \in \mathfrak{G}$.

Следствие 1. *Фильтр $\mathfrak{V}(x)$ окрестностей любой точки $x \in X$ есть минимальный фильтр Коши.*

Достаточно в качестве $\mathfrak{F}$ в предложении 5 взять фильтр всех множеств из X, содержащих x, а в качестве $\mathfrak{B}$ — множество, состоящее из одного элемента $\{x\}$.

Следствие 2. *Всякая точка прикосновения фильтра Коши $\mathfrak{F}$ является его пределом.*

В самом деле, существует фильтр $\mathfrak{G}$, мажорирующий $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{V}(x)$ (гл. I, § 7, предложение 4); поскольку $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши, $\mathfrak{G}$ — также фильтр Коши. Пусть $\mathfrak{F}_0$ — единственный минимальный фильтр Коши, мажорируемый фильтром $\mathfrak{F}$; тогда $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{V}(x)$ оба — минимальные фильтры Коши, мажорируемые фильтром $\mathfrak{G}$, так что $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{V}(x)$, чем и доказана сходимость $\mathfrak{F}$ к x.

Следствие 3. *Всякий фильтр Коши, мажорируемый фильтром, сходящимся к точке x, также сходится к x.*

Вытекает из следствия 2.

Следствие 4. *Если $\mathfrak{F}$ — минимальный фильтр Коши, то всякое множество из $\mathfrak{F}$ имеет непустую внутренность, и она принадлежит $\mathfrak{F}$* (другими словами, существует базис фильтра $\mathfrak{F}$, состоящий из *открытых* множеств).

В самом деле, для каждого окружения V равномерной структуры пространства X существует открытое окружение $U \subset V$ (§ 1, следствие 2 предложения 2), а тогда $U(M)$ для каждого $M \subset X$ открыто и содержится в $V(M)$, и остается применить предложение 5.

3. Полные пространства

Фильтр Коши в равномерном пространстве X *не обязательно имеет предел.*

Примеры. 1) Рассмотрим на рациональной прямой $\mathbf{Q}$ последовательность (u_n), где

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} 2^{-p(p+1)/2};$$

если $m > n$, то

$$|u_m - u_n| \leqslant 2^{-n(n+3)/2}, \tag{1}$$

так что (u_n) есть *последовательность Коши*. Однако эта последовательность не имеет предела в $\mathbf{Q}$: действительно, если бы рациональное число $\frac{a}{b}$ было ее пределом, то в силу (1) при любом n мы имели бы

$$|a/b - h_n/2^{n(n+1)/2}| \leqslant 1/2^{n(n+3)/2},$$

т. е.

$$|a \cdot 2^{n(n+1)/2} - bh_n| \leqslant b \cdot 2^{-n},$$

где h_n — целое число (зависящее от n); но так как левая часть этого неравенства есть целое число при любом n, то она равнялась бы нулю при всех целых n, превышающих целое n_0, для которого $b < 2^{n_0}$, и мы имели бы тогда $a/b = u_n$ для всех $n > n_0$, что абсурдно.

2) Пусть X — бесконечное множество; рассмотрим в X равномерную структуру конечных разбиений (§ 2, n° 2, замечание 1); всякий *ультрафильтр* $\mathfrak{F}$ в X есть фильтр Коши для этой равномерной структуры. В самом деле, пусть (A_i) — конечное разбиение множества X и $V = \bigcup_i (A_i \times A_i)$ — соответствующее окружение; тогда одно из множеств A_i принадлежит $\mathfrak{F}$ (гл. I, § 6, следствие предложения 5), а оно мало порядка V. Но, с другой стороны, X — бесконечное дискретное пространство и, значит, не компактно; следовательно, в X существуют несходящиеся ультрафильтры.

Определение 3. *Полным пространством называют равномерное пространство, в котором всякий фильтр Коши сходится.*

Таким образом, в полном пространстве всякая *последовательность Коши* (n° 1) сходится.

Пример. В *дискретном* равномерном пространстве X всякий фильтр Коши, будучи тривиальным ультрафильтром (гл. I, § 6, n° 4), сходится и, следовательно, X полно.

Из определений 2 и 3 и предложения 2 сразу вытекает следующее предложение, известное под названием *критерия Коши*:

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в множестве X и f — отображение X в* полное *равномерное пространство X'; для того чтобы f имело предел по $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы образ фильтра $\mathfrak{F}$ при f был базисом фильтра Коши.*

Отсюда понятен интерес, который представляют полные пространства во всех вопросах, в которых участвует понятие предела: если функция принимает значения в полном пространстве, то можно доказать *существование* предела, *не зная заранее значения этого предела*, что было бы невозможно, если бы в качестве критерия сходимости в нашем распоряжении имелось только определение предела.

Равномерная структура, *мажорирующая* равномерную структуру полного пространства, не обязательно является равномерной структурой полного пространства (упражнение 2); однако справедливо следующее предложение:

Предложение 7. *Пусть* $\mathcal{U}_1$ *и* $\mathcal{U}_2$ *— равномерные структуры в множестве* X, *а* $\mathcal{T}_1$ *и* $\mathcal{T}_2$ *— порождаемые ими топологии. Предположим, что* $\mathcal{U}_1$ *мажорирует* $\mathcal{U}_2$ *и что, кроме того, существует фундаментальная система окружений для* $\mathcal{U}_1$, *замкнутых в* $X \times X$, *наделенном произведением топологии* $\mathcal{T}_2$ *на себя. Тогда для того чтобы фильтр* $\mathfrak{F}$ *в* X *сходился в топологии* $\mathcal{T}_1$, *необходимо и достаточно, чтобы он был фильтром Коши относительно* $\mathcal{U}_1$, *сходящимся в топологии* $\mathcal{T}_2$.

Условия, очевидно, необходимы, поскольку $\mathcal{T}_1$ мажорирует $\mathcal{T}_2$; докажем их достаточность. Пусть x — предел фильтра $\mathfrak{F}$ в топологии $\mathcal{T}_2$; покажем, что x есть предел $\mathfrak{F}$ в топологии $\mathcal{T}_1$. Действительно, пусть V — симметричное окружение из $\mathcal{U}_1$, замкнутое в произведении $\mathcal{T}_2$ на себя. По предположению $\mathfrak{F}$ содержит множество M, малое порядка V, так что $M \subset V(x')$ для каждого $x' \in M$. Но $V(x')$ *замкнуто* в топологии $\mathcal{T}_2$ и, значит, x, будучи точкой прикосновения к M в этой топологии, принадлежит $V(x')$. Следовательно, $M \subset \overset{2}{V}(x)$, и предложение доказано.

Следствие. *Пусть выполнены условия предложения* 7. *Если при этом* $\mathcal{U}_2$ *— равномерная структура полного пространства, то это верно и для* $\mathcal{U}_1$.

В самом деле, всякий фильтр Коши относительно $\mathcal{U}_1$ будет тогда фильтром Коши относительно $\mathcal{U}_2$ и, значит, по предположению, будет сходиться в топологии $\mathcal{T}_2$.

Отметим, что условия предложения 7 выполняются, когда $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ (§ 1, следствие 2 предложения 2).

4. Подпространства полных пространств

Предложение 8. *Всякое замкнутое подпространство полного пространства полно; всякое полное подпространство* отделимого *равномерного пространства (полного или нет) замкнуто.*

В самом деле, пусть X — полное пространство и A — его замкнутое подпространство. Всякий фильтр Коши $\mathfrak{F}$ в A является базисом фильтра Коши в X (предложение 3) и, значит, сходится к некоторой точке $x \in X$; но так как A замкнуто, то $x \in A$, чем и доказана сходимость $\mathfrak{F}$ в подпространстве A.

Пусть теперь A — незамкнутое множество в *отделимом* равномерном пространстве X и $b \in \bar{A} - A$; след $\mathfrak{V}_A$ на A фильтра $\mathfrak{V}$ окрестностей точки b в X есть фильтр Коши в A; но он не может сходиться к точке $c \in A$, ибо тогда и $\mathfrak{V}$ сходился бы к c (следствие 3 предложения 5), что невозможно, поскольку $b \neq c$, а X отделимо.

Предложение 9. *Пусть X — равномерное пространство и A — всюду плотное множество в X такое, что всякий базис фильтра Коши в A сходится в X; тогда X полно.*

Достаточно доказать, что всякий *минимальный* фильтр Коши $\mathfrak{F}$ в X сходится. Так как A всюду плотно и всякое множество из $\mathfrak{F}$ имеет непустую внутренность (следствие 4 предложения 5), то след $\mathfrak{F}_A$ фильтра $\mathfrak{F}$ на A есть фильтр Коши в A и, значит, сходится к некоторой точке $x_0 \in X$; а так как $\mathfrak{F}$ мажорируется фильтром в X, порождаемым базисом фильтра $\mathfrak{F}_A$, то заключаем, что и $\mathfrak{F}$ сходится к x_0 (следствие 3 предложения 5).

5. Произведения и проективные пределы полных пространств

Предложение 10. *Всякое произведение полных равномерных пространств полно. Обратно, если произведение непустых равномерных пространств полно, то и все пространства-сомножители полны.*

Первое утверждение вытекает из характеризаций фильтров Коши и сходящихся фильтров в произведении пространств (след-

ствие 2 предложения 4 и гл. I, § 7, следствие 1 предложения 10). Обратно, предположим, что $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ (где все X_ι не пусты) полно, и пусть $\mathfrak{F}_\varkappa$ — фильтр Коши в $X_\varkappa$; для каждого $\iota \neq \varkappa$ возьмем какой-нибудь фильтр Коши $\mathfrak{F}_\iota$ в X_ι и рассмотрим фильтр $\mathfrak{F} = \prod_{\iota \in I} \mathfrak{F}_\iota$ в X (гл. I, § 6, n° 7); $\mathfrak{F}$ есть фильтр Коши (следствие 2 предложения 4) и, значит, сходится; следовательно, то же верно и для $\mathrm{pr}_\varkappa \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\varkappa$ (гл. I, § 7, следствие 1 предложения 10).

Следствие. *Пусть* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — *проективная система равномерных пространств. Если все* X_α *отделимы и полны, то это верно и для* $X = \varprojlim X_\alpha$.

В самом деле, как мы знаем, X отделимо и отождествимо с *замкнутым* подпространством произведения $\prod_\alpha X_\alpha$ (гл. I, § 8, следствие 2 предложения 7); поэтому следствие вытекает из предложений 10 и 8.

Проективный предел полных отделимых равномерных пространств X_α может быть *пустым*, даже когда все X_α не пусты и $f_{\alpha\beta}$ сюръективны; это верно уже в случае дискретных пространств (Теор. множ., гл. III, § 1, упражнение 32). Однако справедлива следующая теорема:

Теорема 1 (Миттаг-Леффлер). *Пусть* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — *проективная система полных отделимых равномерных пространств с фильтрующимся предупорядоченным множеством индексов* I, *содержащим* счетное *кофинальное подмножество*; *предположим, кроме того, что* X_α *обладает при любом* $\alpha \in I$ счетной *фундаментальной системой окружений**). *Наконец, предположим, что для каждого* $\alpha \in I$ *существует* $\beta \geqslant \alpha$, *удовлетворяющее следующему условию*:

($\mathrm{ML}_{\alpha\beta}$) *Множество* $f_{\alpha\gamma}(X_\gamma)$ *плотно в* $f_{\alpha\beta}(X_\beta)$ *для всякого* $\gamma \geqslant \beta$.

Если тогда $X = \varprojlim X_\alpha$ *и* f_α — *каноническое отображение* $X \to X_\alpha$, *то для каждого* $\alpha \in I$ *и каждого* $\beta \geqslant \alpha$, *удовлетворяющего условию*

---

*) °Это условие означает, что отделимое равномерное пространство X_α *метризуемо*; см. гл IX, 2-е изд., § 2, теорема 1.°

($\mathrm{ML}_{\alpha\beta}$), $f_\alpha(X)$ *плотно в* $f_{\alpha\beta}(X_\beta)$ (*и, следовательно, X не пусто, если все X_α не пусты*).

Пусть (λ_n) — последовательность индексов, кофинальная I. Начав с какого-либо $\alpha_0 \in I$, определим по индукции возрастающую последовательность (α_n) так, чтобы $\alpha_n \geqslant \lambda_n$ и были выполнены условия ($\mathrm{ML}_{\alpha_n \alpha_{n+1}}$); очевидно, последовательность (α_n) кофинальна I. Будем вместо $f_{\alpha_m \alpha_n}$, где $m \leqslant n$, писать f_{mn} и положим $f_{n,\,n+1}(X_{\alpha_{n+1}}) = Y_n$. Тогда $f_{mn}(Y_n)$ *плотно в* Y_m для любых $m \leqslant n$: действительно, по определению, $f_{m,\,n+1}(X_{\alpha_{n+1}})$ плотно в $f_{m,\,m+1}(X_{\alpha_{m+1}}) = Y_m$, и остается заметить, что $f_{m,\,n+1}(X_{\alpha_{n+1}}) = f_{mn}(f_{n,\,n+1}(X_{\alpha_{n+1}})) = f_{mn}(Y_n)$.

Индукцией по n и k можно определить для каждого n такую фундаментальную систему $(V_{kn})_{k \in \mathbf{N}}$ замкнутых симметричных окружений пространства X_{α_n}, что

$$\overset{2}{V}_{k+1,\,n} \subset V_{kn} \tag{2}$$

и

$$(f_{n,\,n+1} \times f_{n,\,n+1})(V_{k,\,n+1}) \subset V_{kn}. \tag{3}$$

Действительно, пусть $(U_{kn})_{k \in \mathbf{N}}$ — фундаментальная система окружений для X_{α_n}. Предполагая, что V_{kn} определены для заданного n и всех $k \in \mathbf{N}$, можно в силу равномерной непрерывности $f_{n,\,n+1}$ определить индукцией по k окружение $V_{k,\,n+1}$ так, чтобы выполнялось (3) и чтобы, кроме того, $\overset{2}{V}_{k+1,\,n+1} \subset V_{k,\,n+1} \cap U_{k+1,\,n+1}$, чем наше утверждение и доказано.

Пусть теперь $x_0 \in Y_0$. Докажем, что для каждого целого $k > 0$ существует такое $z \in X$, что $(x_0, f_{\alpha_0}(z)) \in V_{k-1,\,0}$, чем теорема будет доказана. Поскольку $f_{n,\,n+1}(Y_{n+1})$ плотно в Y_n, можно по индукции определить последовательность точек $x_n \in Y_n$ так, чтобы

$$(x_n, f_{n,\,n+1}(x_{n+1})) \in V_{k+n,\,n}; \tag{4}$$

в силу (3) отсюда будет следовать, что для всех $m \leqslant n$

$$(f_{mn}(x_n), \quad f_{m,\,n+1}(x_{n+1})) \in V_{k+n,\,m}. \tag{5}$$

Это показывает, что при фиксированном m последовательность $(f_{mn}(x_n))_{n \geqslant m}$ есть *последовательность Коши* в X_{α_m} и тем самым сходится к некоторой точке z_m: действительно, из (5) по индукции

вытекает, что

$$(f_{mp}(x_p),\ f_{m,\,p+q}(x_{p+q})) \in V_{k+p+q-1,\,m} \circ V_{k+p+q-2,\,m} \circ \ldots \circ V_{k+p,\,m} \quad (6)$$

для любой пары целых чисел $p \geqslant m$, $q > 0$, а из (2) ясно, что правая часть соотношения (6) содержится в $V_{k+p-1,\,m}$; беря здесь, в частности, $m = p = 0$ и устремляя q к бесконечности, получаем, что $(x_0, z_0) \in V_{k-1,\,0}$, ибо $V_{k-1,\,0}$ *замкнуто*. С другой стороны, из соотношений $z_m = \lim\limits_{n \to \infty} f_{mn}(x_n)$ и непрерывности $f_{m,\,m+1}$ вытекает, что $f_{m,\,m+1}(z_{m+1}) = z_m$ для всякого $m \geqslant 0$. Но для каждого $\gamma \in I$ имеется по крайней мере одно целое n такое, что $\alpha_n \geqslant \gamma$; положим $z_\gamma = f_{\gamma,\,\alpha_n}(z_n)$; легко видеть, что z_γ не зависит от значения n, при котором $\alpha_n \geqslant \gamma$, и что так определенное семейство $z = (z_\alpha)_{\alpha \in I}$ есть точка из $X = \varprojlim X_\alpha$; этим доказательство завершается, поскольку $f_{\alpha_0}(z) = z_0$.

Следствие 1. *Пусть* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — *проективная система множеств с фильтрующимся множеством индексов* I, *обладающим счетным кофинальным подмножеством, и пусть все* $f_{\alpha\beta}$ *сюръективны; тогда каноническое отображение* $f_\alpha\colon X \to X_\alpha$, *где* $X = \varprojlim X_\alpha$, *сюръективно для каждого* $\alpha \in I$.

В самом деле, достаточно наделить каждое X_α дискретной равномерной структурой.

Следствие 2. *Пусть* I — *фильтрующееся предупорядоченное множество, обладающее счетным кофинальным подмножеством,* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ *и* $(X'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ — *проективные системы множеств относительно* I *и для каждого* $\alpha \in I$ *задано отображение* $u_\alpha\colon X_\alpha \to X'_\alpha$, *причем* u_α *образуют проективную систему отображений; положим* $u = \varprojlim u_\alpha$. *Пусть* $x' = (x'_\alpha)$ — *элемент из* $X' = \varprojlim X'_\alpha$, *удовлетворяющий следующему условию: для каждого* $\alpha \in I$ *существует такое* $\beta \geqslant \alpha$, *что* $f_{\alpha\gamma}(u_\gamma^{-1}(x'_\gamma)) = f_{\alpha\beta}(u_\beta^{-1}(x'_\beta))$ *для всех* $\gamma \geqslant \beta$; *тогда существует* $x \in X = \varprojlim X_\alpha$, *для которого* $u(x) = x'$.

Достаточно применить теорему 1 к проективной системе множеств $u_\alpha^{-1}(x'_\alpha)$, наделенных дискретной равномерной структурой (см. гл. 1, Приложение, предложение 1).

°Пример. Пусть в $\mathbf{C}$ даны: 1° последовательность (a_n) попарно различных точек, модули $|a_n|$ которых образуют возрастающую последовательность, стремящуюся к $+\infty$; 2° для каждого n рациональная функция $z \longmapsto R_n(z)$, определенная на $\mathbf{C} - \{a_n\}$ и имеющая полюс в точке a_n; 3° возрастающая последовательность (B_n) открытых шаров с центром в точке 0, объединение которых есть $\mathbf{C}$, а границы не содержат ни одной из точек a_k. Обозначим через B'_n для каждого n пересечение $\overline{B}_n$ с дополнением в $\mathbf{C}$ множества всех a_k; пусть X_n — множество отображений $z \longmapsto S(z) = P(z) + \sum_{a_k \in B_n} R_k(z)$ множества B'_n в $\mathbf{C}$, где P — сужения на B'_n всевозможных функций, непрерывных на $\overline{B}_n$ и голоморфных в B_n. Определим в X_n расстояние формулой $d_n(S_1, S_2) = \sup_{z \in B'_n} |S_1(z) - S_2(z)|$. Легко видеть, что при этом расстоянии X_n *полно*. Обозначим, наконец, для каждого $n \leqslant m$ через f_{nm} отображение X_m в X_n, относящее отображению $S \in X_m$ его *сужение* на B'_n; очевидно, все f_{nm} *равномерно непрерывны* и (X_n, f_{nm}) есть проективная система равномерных пространств. Ясно, что тогда всякий элемент *проективного предела* $X = \varprojlim X_n$ канонически отождествим с *мероморфной функцией* F на $\mathbf{C}$, для которой единственными полюсами служат точки a_n, а разность $F(z) - R_n(z)$ для каждого n *голоморфна в точке* a_n. Классическая теорема Миттаг-Леффлера утверждает, что X *не пусто*; для ее доказательства достаточно, в силу теоремы 1, проверить условие $(\mathrm{ML}_{n,n+1})$ для всех $n+1$. Пусть $S_{n+1} = P_{n+1} + \sum_{a_k \in B_n} R_k$ — элемент пространства X_{n+1}, так что функция P_{n+1} непрерывна на $\overline{B}_{n+1}$ и голоморфна в B_{n+1}; пусть Q_{mn} для каждого $m > n$ — сужение на B'_n суммы $\sum_{a_k \in B_m - B_{n+1}} R_k$; эта последняя голоморфна в некоторой окрестности шара $\overline{B}_n$ и, значит (благодаря ее разложимости в ряд Тэйлора), для каждого $\varepsilon > 0$ существует полином P_{mn} такой, что $|P_{n+1}(z) - Q_{mn}(z) - P_{mn}(z)| \leqslant \varepsilon$ для всех $z \in B_n$; обозначая через S_m сужение функции $P_{mn} + \sum_{a_k \in B_m} R_k$ на B'_m, имеем $S_m \in X_m$ и $|S_m(z) - S_{n+1}(z)| \leqslant \varepsilon$ для всех $z \in B'_n$, что и завершает доказательство.∎

6. *Продолжение равномерно непрерывных функций*

Теорему о продолжении по непрерывности (гл. I, § 8, теорема 1) можно существенно дополнить, когда речь идет о функциях, принимающих значения в *полного отделимого* равномерного пространства.

Предложение 11. *Пусть A — всюду плотное множество в топологическом пространстве X и f — его отображение в полное*

отделимое равномерное пространство X'. Для того чтобы f могло быть продолжено по непрерывности на X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in X$ образ при f следа на A фильтра окрестностей точки x в X был базисом фильтра Коши в X'.

Это вытекает из упомянутой выше теоремы о продолжении по непрерывности, поскольку X' *регулярно* (§ 1, предложение 3), а сходящиеся фильтры в X' совпадают с фильтрами Коши.

Если X само — *равномерное пространство*, то справедлива еще следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть f — функция, определенная на всюду плотном подпространстве A равномерного пространства X, принимающая значения в полном отделимом равномерном пространстве X' и равномерно непрерывная на A. Тогда f может быть продолжена по непрерывности на все X, причем продолженная функция $\overline{f}$ равномерно непрерывна.*

Существование $\overline{f}$ есть непосредственное следствие предложений 3 и 11. Покажем, что $\overline{f}$ равномерно непрерывна. Пусть V' — замкнутое симметричное окружение для X' и V — такое окружение для X, что для любых точек x и y из A, близких порядка V, $f(x)$ и $f(y)$ близки порядка V'. Можно считать, что V есть замыкание в $X \times X$ некоторого окружения W для A (§ 2, предложение 6). Имеем $(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) \in V'$ для всех $(x, y) \in W$, а так как $\overline{f} \times \overline{f}$ непрерывно на $X \times X$ (гл. I, § 4, предложение 1), то, в силу замкнутости V', $(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) \in V'$ также для всех $(x, y) \in V = \overline{W}$ (гл. I, § 2, теорема 1), и теорема доказана.

Следствие. *Пусть X_1 и X_2 — полные отделимые равномерные пространства, а Y_1 и Y_2 — их всюду плотные подпространства. Тогда всякий изоморфизм f пространства Y_1 на Y_2 продолжается до изоморфизма X_1 на X_2.*

В самом деле, f равномерно непрерывно на Y_1 и, следовательно (теорема 2), продолжается до равномерно непрерывного отображения $\overline{f}$: $X_1 \to X_2$; точно так же обратное к f отображение g продолжается до равномерно непрерывного отображения $\overline{g}$: $X_1 \to X_2$. Тогда $\overline{g} \circ \overline{f}$ есть непрерывное отображение X_1 в себя, совпадающее на Y_1 с тождественным отображением; следовательно, в силу принципа

продолжения тождеств (гл. I, § 8, следствие 1 предложения 2) $\overline{g} \circ \overline{f}$ есть тождественное отображение X_1 на себя; таким же образом $\overline{f} \circ \overline{g}$ есть тождественное отображение X_2 на себя. Следовательно (Теор. множ., Сводка результ., § 2, n° 12), $\overline{f}$ и $\overline{g}$ — взаимно обратные биекции; а тогда, будучи равномерно непрерывными, они — изоморфизмы (§ 2, предложение 2).

Заметим, что продолжение по непрерывности $\overline{f}$ *биективного* равномерно непрерывного отображения f подпространства Y_1 на Y_2 *не обязательно инъективно или сюръективно* (упражнение 3).

7. *Пополнение равномерного пространства*

Теорема 3. *Пусть X — равномерное пространство. Существуют полное отделимое равномерное пространство $\hat{X}$ и равномерно непрерывное отображение i: $X \to \hat{X}$, обладающие следующим свойством*:

(P) *Для любого равномерно непрерывного отображения f пространства X в полное отделимое равномерное пространство Y существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение g: $\hat{X} \to Y$ такое, что $f = g \circ i$.*

Если (i_1, X_1) — вторая пара, состоящая из полного отделимого равномерного пространства X_1 и равномерно непрерывного отображения i_1: $X \to X_1$, обладающая свойством (P), *то существует, и притом единственный, изоморфизм* φ: $\hat{X} \to X_1$ *такой, что* $i_1 = \varphi \circ i$.

Первое утверждение теоремы означает еще, что пара $(i, \hat{X})$ есть решение *проблемы универсального отображения* (Теор. множ., гл. IV, § 3, n° 1), в которой за Σ-множества приняты все *полные отделимые* равномерные пространства, за σ-морфизмы — все равномерно непрерывные отображения и за α-отображения — все равномерно непрерывные отображения пространства X в полные отделимые равномерные пространства. Единственность, с точностью до изоморфизма, пары $(i, \hat{X})$ вытекает поэтому из общих свойств решений проблем универсального отображения (там же). Остается доказать существование пары $(i, \hat{X})$.

1) *Определение пространства $\hat{X}$.* Пусть $\hat{X}$ — *множество всех минимальных фильтров Коши* (n° 2) *в X*. Наделим $\hat{X}$ равномерной структурой. С этой целью для каждого *симметричного* окружения

V равномерной структуры пространства X обозначим через $\tilde{V}$ *множество всех пар* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *минимальных фильтров Коши, имеющих общее множество, малое порядка* V. Покажем, что множества $\tilde{V}$ образуют фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры в $\hat{X}$. Действительно:

1° Так как всякое $\mathfrak{X} \in \hat{X}$ есть фильтр Коши, то согласно определению $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) \in \tilde{V}$ для каждого симметричного окружения V равномерной структуры пространства X, так что (U_1') выполнено.

2° Если V и V' — симметричные окружения равномерной структуры пространства X, то также $W = V \cap V'$ — симметричное окружение, и всякое множество, малое порядка W, мало также порядка V и порядка V'; следовательно, $\tilde{W} \subset \tilde{V} \cap \tilde{V}'$, чем доказано (B_1).

3° Множества $\tilde{V}$ симметричны по определению и, значит, $(\mathrm{U}_{\mathrm{II}}')$ выполнено.

4° Пусть V — произвольное симметричное окружение равномерной структуры пространства X и W — симметричное окружение, для которого $\overset{2}{W} \subset V$. Рассмотрим три минимальных фильтра Коши $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ таких, что $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \in \tilde{W}$ и $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \in \tilde{W}$; тогда существуют множества M, N, малые порядка W и такие, что $M \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$, $N \in \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Z}$. Так как M и N принадлежат $\mathfrak{Y}$, то $M \cap N$ не пусто, и потому (предложение 1) $M \cup N$ мало порядка $\overset{2}{W} \subset V$; а так как $M \cup N$ принадлежит $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Z}$, то $\overset{|2}{\tilde{W}} \subset \tilde{V}$. Таким образом, выполнено и $(\mathrm{U}_{\mathrm{III}}')$.

Покажем, далее, что равномерное пространство $\hat{X}$ *отделимо*. Действительно, пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — минимальные фильтры Коши в X такие, что $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \in \tilde{V}$ для *каждого* симметричного окружения V равномерной структуры пространства X. Очевидно, множества $M \cup N$, где $M \in \mathfrak{X}$ и $N \in \mathfrak{Y}$, образуют базис фильтра $\mathfrak{Z}$, мажорируемого фильтрами $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Но $\mathfrak{Z}$ есть *фильтр Коши*, ибо по предположению для любого симметричного окружения V равномерной структуры пространства X имеется множество P, малое порядка V, принадлежащее одновременно $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, откуда $P \in \mathfrak{Z}$. По определению минимальных фильтров Коши, тогда $\mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}$, чем отделимость $\hat{X}$ доказана.

2) *Определение* i; *равномерная структура пространства* X *есть прообраз относительно* i *равномерной структуры пространства* $\hat{X}$. Как мы знаем, фильтр окрестностей $\mathfrak{V}(x)$ каждой точки x в X есть минимальный фильтр Коши (следствие 1 предложения 5); положим $i(x) = \mathfrak{V}(x)$. Пусть $j = i \times i$; покажем, что $\overset{-1}{j}(\tilde{V}) \subset V \subset \overset{-1}{j}(\overset{3}{\tilde{V}})$ для любого симметричного окружения V равномерной структуры пространства X, чем наше утверждение и будет доказано (§ 2, n° 4). Но если $(i(x), i(y)) \in \tilde{V}$, то имеется множество M, малое порядка V, являющееся окрестностью и точки x, и точки y, так что $(x, y) \in V$. Обратно, если $(x, y) \in V$, то, очевидно, множество $V(x) \cup V(y)$ мало порядка $\overset{3}{V}$ и является окрестностью и x, и y.

3) $\hat{X}$ *полно и* $i(X)$ *плотно в* $\hat{X}$. Найдем след на $i(X)$ окрестности $\tilde{V}(\mathfrak{X})$ точки $\mathfrak{X} \in \hat{X}$; это — множество тех $i(X)$, для которых $(\mathfrak{X}, i(x)) \in \tilde{V}$. Последнее означает, что существует малая порядка V окрестность точки x в X, принадлежащая $\mathfrak{X}$, или еще что x *содержится внутри некоторого малого порядка* V *множества из* $\mathfrak{X}$. Пусть $M \subset X$ есть объединение внутренностей всех малых порядка V множеств из $\mathfrak{X}$; M принадлежит $\mathfrak{X}$ (следствие 4 предложения 5), и из предыдущего следует, что $\tilde{V}(\mathfrak{X}) \cap i(X) = i(M)$; отсюда заключаем, что:

1° $\tilde{V}(\mathfrak{X}) \cap i(X)$ не пусто и, значит, $i(X)$ *плотно* в $\hat{X}$;

2° след на $i(X)$ множества $\tilde{V}(\mathfrak{X})$ принадлежит *базису фильтра* $i(\mathfrak{X})$ в $\hat{X}$ и, следовательно, этот базис фильтра сходится в $\hat{X}$ к *точке* $\mathfrak{X}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши в $i(X)$; по пункту 2) и предложению 4, $\overset{-1}{i}(\mathfrak{F})$ есть базис некоторого фильтра Коши $\mathfrak{G}$ в X; пусть $\mathfrak{X}$ — минимальный фильтр Коши, мажорируемый фильтром $\mathfrak{G}$ (предложение 5); тогда $i(\mathfrak{X})$ есть базис фильтра Коши в $i(X)$ (предложение 3) и $\mathfrak{F} = i(\overset{-1}{i}(\mathfrak{F}))$ мажорирует фильтр с базисом $i(\mathfrak{X})$. Так как последний сходится в $\hat{X}$, то то же верно для $\mathfrak{F}$, и предложение 9 показывает тогда, что $\hat{X}$ *полно*.

4) *Проверка свойства* (P). Пусть f — равномерно непрерывное отображение пространства X в *полное отделимое* равномерное про-

странство Y. Докажем сначала существование и единственность равномерно непрерывного отображения $g_0: i(X) \to Y$, для которого $f = g_0 \circ i$. Действительно, поскольку f непрерывно, необходимо $f(x) = \lim f(\mathfrak{V}(x))$, так что, положив $g_0(i(x)) = \lim f(\mathfrak{V}(x))$, будем иметь $f = g_0 \circ i$; все сводится к установлению *равномерной непрерывности* g_0 на $i(X)$. Пусть U — окружение для Y и V — такое симметричное окружение для X, что $(x, x') \in V$ влечет $(f(x), f(x')) \in U$; в пункте 2) мы видели, что $(i(x), i(x')) \in \tilde{V}$ влечет $(x, x') \in V$, а значит, также $(g_0(i(x)), g_0(i(x'))) \in U$, чем наше утверждение доказано.

Пусть теперь g — продолжение g_0 по непрерывности на $\hat{X}$ (теорема 2); тогда можно также написать $f = g \circ i$, причем ясно, что g — единственное непрерывное отображение $\hat{X}$ в Y, удовлетворяющее последнему соотношению, ибо $i(X)$ плотно в $\hat{X}$ (гл. I, § 8, следствие 1 предложения 2). Теорема полностью доказана.

Определение 4. *Полное отделимое равномерное пространство* $\hat{X}$, *определенное при доказательстве теоремы* 3, *называется отделимым пополнением пространства* X, *а отображение* $i: X \to \hat{X}$ — *каноническим отображением пространства* X *в его отделимое пополнение.*

Отметим еще следующие свойства:

Предложение 12. 1° *Подпространство* $i(X)$ *плотно в* $\hat{X}$.

2° *График отношения эквивалентности* $i(x) = i(x')$ *есть пересечение всех окружений равномерной структуры пространства* X.

3° *Равномерная структура пространства* X *есть прообраз относительно* i *равномерной структуры пространства* $\hat{X}$ (*или равномерной структуры его подпространства* $i(X)$).

4° *Окружения для* $i(X)$ *суть образы при* $i \times i$ *окружений для* X; *замыкания в* $\hat{X} \times \hat{X}$ *окружений для* $i(X)$ *образуют фундаментальную систему окружений для* $\hat{X}$.

Действительно, пункты 1° и 3° были доказаны при доказательстве теоремы 3; 4° является следствием 1° и 3° в силу установленных ранее общих свойств (§ 2, n° 4, замечание и предложение 6). Наконец, соотношение $i(x) = i(x')$ означает, по определению, что

фильтры окрестностей точек x и x' совпадают. Но это влечет, по определению, что $(x, x') \in V$, каково бы ни было окружение V для X, а обратное очевидно.

Следствие. *Если X — отделимое равномерное пространство, то каноническое отображение $i\colon X \to \hat{X}$ есть изоморфизм X на всюду плотное подпространство пространства $\hat{X}$.*

В случае, когда X *отделимо*, $\hat{X}$ называют *пополнением* пространства X; при этом X обыкновенно *отождествляют* посредством i со всюду плотным подпространством в $\hat{X}$.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 3, минимальные фильтры Коши в X будут при таком отождествлении просто следами на X фильтров окрестностей точек из $\hat{X}$.

Следствие предложения 12 *характеризует* пополнение отделимого равномерного пространства.

Предложение 13. *Если Y — полное отделимое пространство и X — всюду плотное его подпространство, то каноническая инъекция $X \to Y$ продолжается до изоморфизма $\hat{X}$ на Y.*

В самом деле, в силу теоремы 2 всякое равномерно непрерывное отображение пространства X в полное отделимое равномерное пространство Z продолжается единственным образом до равномерно непрерывного отображения Y в Z.

Предложение 14. *Пусть X — полное отделимое равномерное пространство, $\mathcal{U}$ — его равномерная структура и Z — всюду плотное подпространство. Если равномерная структура $\mathcal{U}'$ в X, мажорируемая равномерной структурой $\mathcal{U}$, индуцирует в Z ту же равномерную структуру, что и $\mathcal{U}$, то $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$.*

Обозначим через X' множество X, наделенное равномерной структурой $\mathcal{U}'$; композицию канонического отображения $X' \to \hat{X}'$ и тождественного отображения $X \to X'$, которое равномерно непрерывно, можно рассматривать как равномерно непрерывное отображение $\varphi\colon X \to \hat{X}'$. Так как Z отделимо в равномерной структуре,

которую индуцирует $\mathcal{U}'$, то сужение φ на Z является в силу предположения изоморфизмом Z на всюду плотное подпространство $\varphi(Z)$ пространства $\hat{X}$; отсюда вытекает (следствие теоремы 2), что φ само — изоморфизм X на $\hat{X}'$; следовательно, $X'=\hat{X}'$ и $\mathcal{U}'=\mathcal{U}$.

Предложение 15. *Пусть X и X' — равномерные пространства; для каждого равномерно непрерывного отображения f: $X\to X'$ существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение $\hat{f}$: $\hat{X}\to\hat{X}'$ такое, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ \hat{X} & \xrightarrow[\hat{f}]{} & \hat{X}' \end{array}$$

где i: $X\to\hat{X}$ и i': $X'\to\hat{X}'$ — канонические отображения, коммутативна *).

Для доказательства достаточно применить теорему 3 к функции $i'\circ f$: $X\to\hat{X}'$.

Следствие. *Пусть f: $X\to X'$ и g: $X'\to X''$ — равномерно непрерывные отображения; если $h=g\circ f$, то $\hat{h}=\hat{g}\circ\hat{f}$.*

Это сразу следует из свойства единственности в предложении 15.

8. *Отделимое равномерное пространство, ассоциированное с равномерным пространством*

Предложение 16. *Пусть X — равномерное пространство и i — каноническое отображение X в его отделимое пополнение $\hat{X}$. Для каждого равномерно непрерывного отображения f пространства X в отделимое равномерное пространство Y существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение h: $i(X)\to Y$ такое, что $f=h\circ i$.*

В самом деле (следствие предложения 12), Y отождествимо с подпространством его пополнения $\hat{Y}$, и f можно тогда рассматривать как равномерно непрерывное отображение X в $\hat{Y}$. Следовательно, в силу теоремы 3 его можно записать в виде $f=g\circ i$, где g —

*) Иными словами, $i'\circ f=\hat{f}\circ i$.

равномерно непрерывное отображение $\hat{X}$ в $\hat{Y}$; обозначая через h сужение g на $i(X)$, имеем, очевидно, $f=h\circ i$, и h отображает $i(X)$ в Y; единственность h тривиальна.

Таким образом, пара $(i, i(X))$ служит решением *проблемы универсального отображения* (Теор. множ., гл. IV, § 3, n° 1), где на этот раз за Σ-множества принимаются *отделимые* равномерные пространства, а за σ-морфизмы (соотв. α-отображения) — равномерно непрерывные отображения (соотв. равномерно непрерывные отображения пространства X в отделимое равномерное пространство).

Определение 5. *Отделимое равномерное пространство $i(X)$, определенное при доказательстве теоремы* 3, *называется отделимым равномерным пространством, ассоциированным с X.*

Таким образом, *отделимое пополнение* пространства X есть не что иное, как пополнение отделимого пространства, *ассоциированного* с X. Если X *полно*, то из определения $\hat{X}$ вытекает (теорема 3), что отображение $i\colon X\to\hat{X}$ *сюръективно*, и, значит, отделимое пространство, ассоциированное с X, совпадает с отделимым пополнением пространства X.

Следствие. *Пусть X и Y — равномерные пространства, а X' и Y' — ассоциированные отделимые пространства; для каждого равномерно непрерывного отображения $f\colon X\to Y$ существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение $f'\colon X'\to Y'$ такое, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ X' & \xrightarrow[f']{} & Y' \end{array}$$

где i и i' — канонические отображения, коммутативна.

Применяем предложение 16 к $i'\circ f\colon X\to Y'$.

Отделимое пространство, ассоциированное с равномерным пространством, характеризуется еще следующим свойством:

Предложение 17. *Пусть X — равномерное пространство, $i(X)$ — ассоциированное с ним отделимое пространство и f — такое отображение пространства X на отделимое равномерное пространство X', что равномерная структура пространства X является прообразом относительно f равномерной структуры пространства X'. Тогда отображение g: $i(X) \to X'$, для которого $f = g \circ i$, есть изоморфизм.*

Как мы знаем, g равномерно непрерывно (предложение 16); очевидно, оно сюръективно, и оно также инъективно, поскольку соотношение $f(x) = f(y)$ влечет по определению, что (x, y) принадлежит любому окружению для X и, значит, $i(x) = i(y)$ (предложение 12). Наконец, все окружения для X' суть образы при $f \times f$ окружений для X (§ 2, n° 4, замечание), а значит, также образы при $g \times g$ окружений для $i(X)$ (предложение 12), и предложение доказано.

Замечание. Пусть R — отношение эквивалентности $i(x) = i(x')$ в X; как мы видели (предложение 12), его график C есть пересечение всех окружений для X. Ясно, что всякое открытое множество (а следовательно, и всякое замкнутое множество) в X *насыщено* по R; принимая во внимание определение прообраза топологии, заключаем, что порождаемая отображением i каноническая биекция топологического факторпространства X/R на $i(X)$ есть *гомеоморфизм*; таким образом, отделимое пространство, ассоциированное с X, отождествимо, как топологическое пространство, с X/R. Каноническое отображение i: $X \to i(X)$ открыто и замкнуто и даже совершенно (гл. I, § 10, n° 2, пример).

Пусть X' — второе равномерное пространство, C' — пересечение окружений его равномерной структуры и R' — отношение эквивалентности с графиком C'. Пусть f: $X \to X'$ — *непрерывное* отображение; так как прообраз относительно f всякой окрестности точки $f(x)$ есть окрестность точки x, то прообраз относительно f множества $C'(f(x))$ содержит $C(x)$; следовательно, f *согласуется* с R и R' и дает при факторизации непрерывное отображение $X/R \to X'/R'$ (гл. I, § 3, следствие предложения 6); это обобщает следствие предложения 16.

9. Пополнение подпространств и произведений пространств

Предложение 18. *Пусть X — множество, $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство равномерных пространств и f_λ для каждого $\lambda \in L$ — отображение X в Y_λ; наделим X слабейшей равномерной структурой $\mathcal{U}$, при*

которой все f_λ равномерно непрерывны. Тогда равномерная структура отделимого пополнения $\hat{X}$ пространства X является слабейшей, при которой равномерно непрерывны все отображения $\hat{f}_\lambda$: $\hat{X} \to \hat{Y}_\lambda$ ($\lambda \in L$) (предложение 15). *При этом $\hat{X}$ отождествимо с замыканием в $\prod_{\lambda \in L} \hat{Y}_\lambda$ образа пространства X при отображении $x \mapsto (g_\lambda(x))$, где $g_\lambda = j_\lambda \circ f_\lambda$, а j_λ — каноническое отображение Y_λ в $\hat{Y}_\lambda$.*

Пусть X' (соотв. Y'_λ) — отделимое равномерное пространство, ассоциированное с X (соотв. с Y_λ), и f'_λ: $X' \to Y'_\lambda$ — равномерно непрерывное отображение, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_\lambda} & Y_\lambda \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_\lambda} \\ X' & \xrightarrow[f'_\lambda]{} & Y'_\lambda \end{array}$$

где i — каноническое отображение.

Транзитивность инициальных равномерных структур (§ 2, предложение 5) показывает, с одной стороны, что $\mathcal{U}$ есть слабейшая равномерная структура, при которой равномерно непрерывны все отображения $j_\lambda \circ f_\lambda$: $X \to Y'_\lambda$, а с другой,— что $\mathcal{U}$ является также прообразом относительно i слабейшей равномерной структуры $\mathcal{U}'$ в множестве X', при которой равномерно непрерывны все f'_λ. Но $\mathcal{U}'$ *отделима*, ибо если x_1, x_2 — такие точки из X, что $j_\lambda(f_\lambda(x_1)) = j_\lambda(f_\lambda(x_2))$ для каждого $\lambda \in L$, то (x_1, x_2) принадлежит всем окружениям равномерной структуры $\mathcal{U}$, и, следовательно, $i(x_1) = i(x_2)$. Предложение 17 показывает, таким образом, что $\mathcal{U}'$ есть равномерная структура отделимого пространства X', ассоциированного с X.

Далее, X' отождествимо посредством биекции $x' \mapsto (f'_\lambda(x'))$ с равномерным подпространством равномерного пространства $\prod_\lambda Y'_\lambda$ (§ 2, предложение 8). Поскольку все Y'_λ отделимы, каждое Y'_λ отождествимо со всюду плотным подпространством его пополнения $\hat{Y}_\lambda$, и, значит, $\prod_\lambda Y'_\lambda$ — со всюду плотным подпространством произведения $\prod_\lambda \hat{Y}_\lambda$ (гл. I, § 4, предложение 7). Но $\prod_\lambda \hat{Y}_\lambda$ отделимо и полно (предложение 10); поэтому замыкание $\overline{X'}$ под-

пространства X' в $\prod \hat{Y}_\lambda$ есть полное отделимое подпространство (предложение 8), отождествимое тем самым с отделимым пополнением $\hat{X}$ пространства X; отображения $\hat{f}_\lambda$ отождествляются при этом с проекциями на $\hat{Y}_\lambda$, и предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть X — равномерное пространство, а i — каноническое отображение X в его отделимое пополнение $\hat{X}$. Если A — подпространство пространства X и $j\colon A \to X$ — каноническая инъекция, то $\hat{j}\colon \hat{A} \to \hat{X}$ есть изоморфизм $\hat{A}$ на замыкание $i(A)$ в $\hat{X}$.*

Следствие 2. *Пусть $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство равномерных пространств. Отделимое пополнение пространства $\prod_{\lambda \in L} Y_\lambda$ канонически изоморфно произведению $\prod_{\lambda \in L} \hat{Y}_\lambda$.*

Упражнения

°1) Обозначим через $\mathcal{U}$ аддитивную равномерную структуру в числовой прямой $\mathbf{R}$ и через $\mathcal{U}'$ — ее прообраз относительно отображения $x \longmapsto x^3$ прямой $\mathbf{R}$ на себя. Показать, что $\mathcal{U}'$ сильнее $\mathcal{U}$, но что фильтры Коши для этих двух равномерных структур одни и те же.

2) а) Пусть X — бесконечное множество и $\mathfrak{F}$ — нетривиальный ультрафильтр в X. Показать, что в пополнении X, наделенного равномерной структурой $\mathcal{U}(\mathfrak{F})$ (§ 1, упражнение 1), дополнение к X состоит из одной точки и что топологическое пространство $\hat{X}$ отождествимо с пространством, ассоциированным с ультрафильтром $\mathfrak{F}$ (гл. I, § 6, n° 5, пример).

°б) Получить из а) пример равномерной структуры в $\mathbf{R}$, которая мажорировала бы аддитивную равномерную структуру и в которой $\mathbf{R}$ не было бы полно.

°3) а) Пусть $\mathcal{U}$ — аддитивная равномерная структура в числовой прямой $\mathbf{R}$, $\mathcal{U}_1$ — равномерная структура, индуцируемая в $\mathbf{R}$ равномерной структурой расширенной прямой $\overline{\mathbf{R}}$, и $\mathcal{U}_2$ — равномерная структура, индуцируемая в $\mathbf{R}$ равномерной структурой ее компактификации Александрова $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{P}_1(\mathbf{R})$. $\mathcal{U}$ сильнее $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1$ сильнее $\mathcal{U}_2$, но топологии, порождаемые этими тремя равномерными структурами, совпадают; пополнениями прямой $\mathbf{R}$ по этим трем равномерным структурам служат соответственно $\mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{R}}$. Тождественное отображение $\mathbf{R}$ на себя продолжается по непрерывности до инъективного, но не сюръективного отображения $\mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ и до сюръективного, но не инъективного отображения $\overline{\mathbf{R}} \to \tilde{\mathbf{R}}$.

б) Получить из а) пример отделимых равномерных пространств X, Y и равномерно непрерывного биективного отображения $u\colon X \to Y$, продолжение которого по непрерывности $\bar{u}\colon \hat{X} \to \hat{Y}$ ни инъективно, ни сюръективно.

*4) Пусть в обозначениях упражнения 5 § 2 все равномерные пространства X_t полны. Показать, что в равномерной структуре, определенной в указанном упражнении, пространство X полно. [Рассуждая от противного, использовать следствие 2 предложения 5.]

5) Пусть X — отделимое равномерное пространство, являющееся пересечением счетного семейства открытых подмножеств своего пополнения $\hat{X}$. Показать, что для всякого отделимого равномерного пространства Y, имеющего X своим равномерным подпространством, X будет пересечением некоторого замкнутого множества из Y со счетным семейством открытых множеств.

6) Пусть X — равномерное пространство, $i\colon X \to \hat{X}$ — каноническое отображение X в его отделимое пополнение, X_0 — сумма множеств X и $\hat{X} - i(X)$ и $j\colon X_0 \to \hat{X}$ — отображение, совпадающее с i на X и с тождественным отображением на $\hat{X} - i(X)$. Показать, что X_0, наделенное прообразом относительно j равномерной структуры пространства $\hat{X}$, полно. При этом для всякого полного равномерного пространства Y, имеющего X своим равномерным подпространством, тождественное отображение $X \to X$ продолжается единственным образом до непрерывного отображения $X_0 \to Y$.

*7) Пусть X — отделимое равномерное пространство, $\mathcal{U}$ — его равномерная структура, $\mathcal{U}_0$ — равномерная структура, индуцируемая в $\mathfrak{F}(X)$ равномерной структурой $\tilde{\mathcal{U}}$ (§ 2, упражнение 6б), и $\mathcal{U}_{00}$ — равномерная структура, индуцируемая в $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(X))$ равномерной структурой $\tilde{\mathcal{U}}_0$. Показать, что каноническое отображение $x \mapsto \{\{x\}\}$ пространства X в $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(X))$ продолжается до изоморфизма пространства $\tilde{X}$ на некоторое замкнутое равномерное подпространство пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(X))$ (наделенного равномерной структурой $\mathcal{U}_{00}$). [Использовать предложение 9.]

§ 4. Связи между равномерными и компактными пространствами

1. *Равномерность компактных пространств*

Определение 1. *Будем говорить, что равномерная структура в топологическом пространстве X согласуется с его топологией, если последняя совпадает с топологией, порождаемой рассматриваемой равномерной структурой.*

Будем говорить, что топологическое пространство равномеризуемо и что его топология равномеризуема, если существует равномерная структура, согласующаяся с его топологией.

Существуют неравномеризуемые топологические пространства, как, например (в силу следствия 3 предложения 2 § 1), пространства, не удовлетворяющие аксиоме (O_{III}); таким образом, возникает задача нахождения условий, при которых топологическое пространство X равномеризуемо.

Полный ответ на этот вопрос будет дан лишь в § 1 главы IX. В настоящем же параграфе будет изучен только тот важный частный случай, когда X *компактно*. Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *В компактном пространстве X существует, и притом единственная, равномерная структура, согласующаяся с его топологией; множество всех окружений этой равномерной структуры совпадает с множеством всех окрестностей диагонали Δ в $X \times X$; кроме того, X, наделенное этой равномерной структурой, есть полное равномерное пространство.*

Последняя часть теоремы очевидна: действительно, всякий фильтр Коши в X имеет точку прикосновения (аксиома (C)) и, значит, сходится (§ 3, следствие 2 предложения 5).

Покажем, во-вторых, что если существует равномерная структура, согласующаяся с топологией в X, то множество $\mathfrak{U}$ всех окружений этой равномерной структуры совпадает с множеством всех окрестностей диагонали Δ. Мы уже знаем, что всякое окружение есть окрестность диагонали Δ (§ 1, предложение 2); достаточно установить, что, обратно, всякая окрестность диагонали Δ принадлежит $\mathfrak{U}$. Но если бы существовала окрестность U диагонали Δ, не принадлежащая $\mathfrak{U}$, то множества $V \cap \complement U$, где V пробегает $\mathfrak{U}$, образовывали бы базис некоторого фильтра $\mathfrak{G}$ в компактном пространстве $X \times X$; следовательно, $\mathfrak{G}$ имел бы точку прикосновения (a, b), не принадлежащую Δ, и так как $\mathfrak{U}$ мажорировалось бы тогда фильтром $\mathfrak{G}$, то (a, b) была бы точкой прикосновения и для $\mathfrak{U}$. Но равномерная структура, которую определяет $\mathfrak{U}$, по предположению отделима, так что пересечение замыканий множеств из $\mathfrak{U}$ есть Δ (§ 1, следствие 2 предложения 2 и предложение 3); тем самым мы пришли к противоречию.

Остается показать, что множество $\mathfrak{V}$ всех окрестностей диагонали Δ в $X \times X$ действительно есть множество всех окружений равномерной структуры, согласующейся с топологией в X. Для этого достаточно убедиться в том, что $\mathfrak{V}$ есть множество всех окружений некоторой *отделимой* равномерной структуры в X, ибо тогда топология, порождаемая этой структурой, будет отделимой топологией, *мажорируемой* топологией пространства X (гл. I, § 2, предложение 3) и, следовательно, необходимо совпадающей с этой последней (гл. I, § 9, следствие 3 теоремы 2).

Ясно, что $\mathfrak{V}$ удовлетворяет аксиомам (F_I) и (F_{II}); покажем, что аксиомы (U_{II}) и (U_{III}) тоже выполнены и что Δ есть пересечение всех множеств из $\mathfrak{V}$. Последнее очевидно, ибо всякое множество в $X \times X$, состоящее из одной точки (x, y), замкнуто в силу отделимости X, так что если $x \neq y$, то дополнение точки (x, y) в $X \times X$ есть окрестность диагонали Δ. Так как симметрия $(x, y) \longmapsto (y, x)$ есть гомеоморфизм $X \times X$ на себя, то для каждого $V \in \mathfrak{V}$ имеем также $V^{-1} \in \mathfrak{V}$, чем доказано (U_{II}). Предположим, наконец, что $\mathfrak{V}$ не удовлетворяет аксиоме (U_{III}); тогда существует такое $V \in \mathfrak{V}$, что $\overset{2}{W} \cap \mathbf{C}V$ при любом $W \in \mathfrak{V}$ не пусто; таким образом, множества $\overset{2}{W} \cap \mathbf{C}V$ (где W пробегает $\mathfrak{V}$) образуют базис фильтра в $X \times X$ и, следовательно, этот последний имеет точку прикосновения (x, y), не принадлежащую Δ. Но, поскольку X *регулярно* (гл. I, § 9, следствие предложения 1), существуют открытая окрестность U_1 точки x и открытая окрестность U_2 точки y, не имеющие общих точек, и затем *замкнутые* окрестности этих точек $V_1 \subset U_1$ и $V_2 \subset U_2$. Положим $U_3 = \mathbf{C}(V_1 \cup V_2)$ и рассмотрим в $X \times X$ окрестность $W = \bigcup_{i=1,2,3} (U_i \times U_i)$ диагонали Δ. Из этих определений непосредственно следует, что если $(u, v) \in W$ и $u \in V_1$ (соотв. $u \in U_1$), то необходимо $v \in U_1$ (соотв. $v \in U_1 \cup U_3 = \mathbf{C}V_2$); следовательно, окрестность $V_1 \times V_2$ точки (x, y) в $X \times X$ не пересекается с $\overset{2}{W}$, и мы пришли к противоречию.

Замечание 1. Для всякого *конечного открытого покрытия* $\mathfrak{R} = (U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ пространства X множество $V_{\mathfrak{R}} = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \times U_i)$ есть окрестность диагонали Δ в $X \times X$; эти множества образуют *фунда-*

ментальную систему окрестностей диагонали Δ (и тем самым *фундаментальную систему окружений* единственной равномерной структуры в X); действительно, пусть W — произвольная окрестность диагонали Δ в $X \times X$; каждая точка $x \in X$ обладает открытой окрестностью U_x в X такой, что $U_x \times U_x \subset W$. Так как U_x $(x \in X)$ образуют открытое покрытие пространства X, то существует конечное число точек x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ такое, что U_{x_i} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ образуют покрытие $\mathfrak{R}$ пространства X; тогда $V_{\mathfrak{R}} \subset W$, и утверждение доказано.

На этом основании часто говорят, что единственная равномерная структура в X есть *равномерная структура конечных открытых покрытий* (см. гл. IX, 2-е изд., § 4, упражнение 17).

Следствие 1. *Всякое подпространство компактного пространства равномеризуемо.*

Следствие 2. *Всякое локально компактное пространство равномеризуемо.*

Достаточно заметить, что в силу теоремы Александрова (гл. I, § 9, теорема 4) локально компактное пространство гомеоморфно подпространству компактного пространства.

Замечание 2. Отметим, что может существовать много различных равномерных структур, согласующихся с топологией локально компактного пространства.

Например, мы видели, что в бесконечном дискретном пространстве имеется несколько различных равномерных структур, согласующихся с дискретной топологией (§ 2, n° 2, замечание).

Однако не следует думать, что единственность равномерной структуры, согласующейся с топологией равномеризуемого пространства, есть характеристическое свойство компактных пространств; имеются локально компактные, но не компактные, пространства, также обладающие этим свойством (упражнение 4).

Теорема 2. *Всякое непрерывное отображение f компактного пространства X в равномерное пространство X' равномерно непрерывно.*

В самом деле, отображение $g = f \times f$ непрерывно на $X \times X$ (гл. I, § 4, следствие 1 предложения 1) и потому прообраз $g^{-1}(V')$ всякого открытого окружения V' для X' (очевидно, содержащий диагональ)

является открытым множеством в $X \times X$; тем самым теорема 2 вытекает из теоремы 1, поскольку открытые окружения равномерной структуры пространства X' образуют фундаментальную систему ее окружений (§ 1, следствие 2 предложения 2).

При условиях теоремы 2, сужение f на любое подпространство A пространства X равномерно непрерывно; отсюда (§ 3, теорема 2):

Следствие. *Пусть A — всюду плотное подпространство компактного пространства X и f — отображение A в полное отделимое равномерное пространство X'; для того чтобы f продолжалось по непрерывности на всё X, необходимо и достаточно, чтобы f было равномерно непрерывно.*

2. Компактность равномерных пространств

Определение 2. *Равномерное пространство X называется предкомпактным, если его отделимое пополнение $\hat{X}$ компактно. Множество A в равномерном пространстве X называется предкомпактным, если равномерное подпространство A пространства X предкомпактно.*

Таким образом, чтобы множество A в равномерном пространстве X было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы замыкание в $\hat{X}$ множества $i(A)$, где $i\colon X \to \hat{X}$ — каноническое отображение, было компактным (§ 3, следствие 1 предложения 18).

Пример. Во всяком равномерном пространстве X множество всех точек какой-либо *последовательности Коши* (x_n) предкомпактно. Действительно, так как образы точек x_n в $\hat{X}$ образуют снова последовательность Коши, то можно ограничиться случаем, когда X отделимо. Замыкание в $\hat{X}$ множества точек x_n состоит тогда из всех x_n и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ и, значит, компактно (гл. I, § 9, n° 3, пример 2).

Теорема 3. *Для того чтобы равномерное пространство X было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого окружения V равномерной структуры пространства X существовало конечное покрытие этого пространства множествами, малыми порядка V.*

Нагляднее это условие можно выразить, сказав, что существуют конечные покрытия пространства X *сколь угодно малыми* множествами.

Пусть i — каноническое отображение X в $\hat{X}$; окружения для X суть прообразы относительно $i \times i$ окружений для $\hat{X}$ (§ 3, предложение 12). Чтобы доказать *необходимость* условия теоремы, рассмотрим произвольное окружение U для $\hat{X}$ и такое симметричное окружение U' для $\hat{X}$, что $\overset{2}{U'} \subset U$; поскольку $\hat{X}$ компактно, существует такое конечное число точек $x_j \in \hat{X}$, что множества $U'(x_j)$ (малые порядка U) образуют покрытие пространства $\hat{X}$; тогда множества $\overset{-1}{i}(U'(x_j))$ образуют покрытие пространства X множествами, малыми порядка V, где V — прообраз U относительно $i \times i$. *Достаточность* условия теоремы будет установлена, если мы покажем, что оно влечет сходимость каждого ультрафильтра $\mathfrak{F}$ в $\hat{X}$; в силу полноты $\hat{X}$ достаточно проверить, что $\mathfrak{F}$ есть *фильтр Коши* или, иначе, что для каждого *замкнутого* окружения U равномерной структуры пространства $\hat{X}$ в $\mathfrak{F}$ существует множество, малое порядка U (§ 1, следствие 2 предложения 2). Пусть V — прообраз U относительно $i \times i$ и (B_j) — конечное покрытие пространства X множествами, малыми порядка V; множества $C_j = i(B_j)$ образуют покрытие пространства $i(X)$ множествами, малыми порядка U, и, следовательно, $\hat{X} = \bigcup_j \overline{C}_j$; с другой стороны, так как $C_j \times C_j \subset U$, а U замкнуто в $\hat{X} \times \hat{X}$, то $\overline{C}_j \times \overline{C}_j \subset U$, т. е. все $\overline{C}_j$ тоже малы порядка U. А так как $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр, то одно из $\overline{C}_j$ принадлежит $\mathfrak{F}$ (гл. I, § 6, следствие предложения 5).

Следствие. *Для того чтобы равномерное пространство X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимо, полно и для любого окружения V его равномерной структуры существовало конечное покрытие этого пространства множествами, малыми порядка V.*

Это вытекает из теорем 3 и 1.

Замечание 1. Неотделимое *квазикомпактное* пространство не всегда равномеризуемо, ибо не всегда удовлетворяет аксиоме (O_{III}) (см. гл. I, § 9, n° 2); например, большинство неотделимых квазикомпактных пространств, встречающихся в алгебраической геометрии, не удовлетворяет (O_{III}) (см. упражнение 2).

Предложение 1. *В равномерном пространстве всякое подмножество предкомпактного множества, всякое конечное объединение предкомпактных множеств и замыкание всякого предкомпактного множества есть предкомпактное множество.*

Первые два утверждения сразу следуют из теоремы 3. С другой стороны, пусть X — равномерное пространство, A — предкомпактное множество в X, i — каноническое отображение X в его отделимое пополнение $\hat{X}$; тогда $i(\bar{A})$ содержится в замыкании множества $i(A)$ в $\hat{X}$ (гл. I, § 2, теорема 1); значит, в силу предположения замыкание множества $i(\bar{A})$ в $\hat{X}$ содержится в компактном множестве, а следовательно, компактно.

Замечание 2. В равномерном пространстве X *относительно компактное* множество A *предкомпактно*, ибо содержится в компактном множестве. Напротив, даже если X отделимо, предкомпактное множество *не обязательно относительно компактно* в X, как это показывает случай, когда само X предкомпактно, но не компактно.

Предложение 2. *Пусть f: $X \to Y$ — равномерно непрерывное отображение. Образ $f(A)$ всякого предкомпактного множества A из X есть предкомпактное множество в Y.*

В самом деле, пусть i: $X \to \hat{X}$ и j: $Y \to \hat{Y}$ — канонические отображения; тогда $j(f(A)) = \hat{f}(i(A))$ (§ 3, предложение 15) и, значит, $j(f(A))$ относительно компактно в $\hat{Y}$ (гл. I, § 9, следствие 1 теоремы 2).

Предложение 3. *Пусть X — множество, $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство равномерных пространств и f_λ для каждого $\lambda \in L$ — отображение X в Y_λ; наделим X слабейшей из равномерных структур, при которых все f_λ равномерно непрерывны. Для того чтобы множество A в X было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы $f_\lambda(A)$ было предкомпактным множеством в Y_λ для каждого $\lambda \in L$.*

В силу предложения 2 условие необходимо; а принимая во внимание характеризацию отделимого пополнения пространства X, данную в предложении 18 § 3, условие достаточно на основании теоремы Тихонова (гл. I, § 9, следствие теоремы 3).

3. Компактные множества в равномерном пространстве

Следующее предложение уточняет, в любом равномерном пространстве, предложение 2 § 9 гл. I о компактных пространствах.

Предложение 4. *Пусть в равномерном пространстве X даны компактное множество A и замкнутое множество B такие, что $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует окружение V для X такое, что $V(A) \cap V(B) = \varnothing$.*

В самом деле, в противном случае ни одно из множеств $A \cap \overset{2}{V}(B)$, где V пробегает все симметричные окружения для X, не было бы пусто; эти множества образовывали бы тогда базис фильтра в A, обладающий точкой прикосновения $x_0 \in A$. Таким образом, для любого симметричного окружения V равномерной структуры пространства X множество $\overset{3}{V}(x_0)$ пересекалось бы с B, откуда, в силу замкнутости B, следовало бы, что $x_0 \in B$, в противоречие с предположением.

Следствие. *Пусть A — компактное множество в равномерном пространстве X; множества $V(A)$, где V пробегает множество всех окружений для X, образуют фундаментальную систему окрестностей множества A.*

В самом деле, пусть U — произвольная открытая окрестность множества A; тогда $B = \complement U$ замкнуто и не пересекается с A; по предложению 4 существует такое окружение V, что $V(A) \cap V(B) = \varnothing$; тогда, тем более, $V(A) \subset U$, и утверждение следствия доказано.

4. Связные множества в компактном пространстве

Определение 3. *Пусть V — симметричное окружение для равномерного пространства X; конечная последовательность $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ точек из X называется V-цепью, если точки x_i и x_{i+1} близки порядка V для любого i $(0 \leqslant i \leqslant n)$; точки x_0 и x_n называются концами V-цепи, причем говорят, что они соединены этой V-цепью.*

Пусть дано произвольное симметричное окружение V; как легко проверить, отношение «существует V-цепь, соединяющая x и y» есть отношение эквивалентности между x и y в X; пусть $A_{x,V}$ — класс эквивалентности точки x по этому отношению, т. е. множество всех точек $y \in X$, которые могут быть соединены с x посредством V-цепи. Ясно, что если $y \in A_{x,V}$, то $V(y) \subset A_{x,V}$, так что множество $A_{x,V}$ открыто; но его дополнение, являясь объединением классов эквивалентности, тоже открыто. Таким образом, имеем:

Предложение 5. *В равномерном пространстве X множество $A_{x,V}$ тех точек, которые могут быть соединены с данной точкой x посредством V-цепи, открыто-замкнуто.*

Обозначим через A_x для каждого $x \in X$ пересечение множеств $A_{x,V}$, где V пробегает множество всех симметричных окружений равномерной структуры пространства X; это — класс эквивалентности точки x по отношению эквивалентности «для любого симметричного окружения V существует V-цепь, соединяющая x и y».

Предложение 6. *В компактном пространстве X связная компонента точки x, множество A_x и пересечение всех открыто-замкнутых окрестностей точки x совпадают.*

Достаточно показать, что A_x *связно*; в самом деле, в любом равномерном пространстве X связная компонента точки x содержится в пересечении всех открыто-замкнутых окрестностей этой точки, а последнее в свою очередь содержится в A_x в силу предложения 5.

Предположим, что A_x не связно; поскольку A_x *замкнуто*, существуют непустые *замкнутые* множества B и C без общих точек такие, что $B \cup C = A_x$. По предложению 4 тогда существует такое окружение U для X, что $U(B) \cap U(C) = \varnothing$; пусть W — *открытое* окружение, для которого $\overset{2}{W} \subset U$, и H — *замкнутое* множество, дополнительное к $W(B) \cup W(C)$ в X. Предположим, например, что $x \in B$, и рассмотрим точку $y \in C$; как легко убедиться индукцией по i, для любого симметричного окружения $V \subset W$ всякая V-цепь $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, соединяющая x и y в X, будет, по выбору W, необходимо содержать по крайней мере одну точку из H. Но по предположению точки x и y могут быть соединены V-цепью, каково бы ни было симметричное окружение V. Следовательно, для $V \subset W$ множество $H \cap A_{x,V}$ не пусто. С другой стороны, если $V' \subset V$, то, очевидно,

$A_{x,\,V'} \subset A_{x,\,V}$; значит, множества $H \cap A_{x,\,V}$, где V пробегает все симметричные окружения для X, образуют в компактном пространстве H базис фильтра, составленный из *замкнутых* множеств. Следовательно, существует точка, принадлежащая всем этим множествам, иными словами, общая точка множеств H и A_x; так как это противоречит определению множества H, предложение доказано.

Следствие. *Пусть X — локально компактное пространство и K — его* компактная *связная компонента. Тогда открыто-замкнутые окрестности множества K образуют фундаментальную систему его окрестностей.*

В самом деле, пусть V — относительно компактная открытая окрестность множества K в X (гл. I, § 9, предложение 10) и F — ее граница. Пусть $U \subset \overline{V}$ — множество, открыто-замкнутое *относительно* $\overline{V}$; тогда U замкнуто в X, и если, кроме того, U не пересекается с F, то U открыто в X, ибо тогда $U \subset V$ и U открыто относительно V. Таким образом, все сводится к доказательству того, что в $\overline{V}$ существует множество, открыто-замкнутое относительно $\overline{V}$, содержащее K и не пересекающееся с F. Предположим противное; тогда пересечения с F множеств, открыто-замкнутых относительно $\overline{V}$ и содержащих K, образуют в F базис фильтра, состоящий из замкнутых множеств; поскольку F компактно, эти множества должны иметь общую точку $y \in F$; но это невозможно, ибо $\overline{V}$ — компактное пространство, K — его связная компонента, и в силу предложения 6 пересечение всех открыто-замкнутых в $\overline{V}$ множеств, содержащих K, совпадает с K. Тем самым следствие доказано.

Предложение 7. *Пусть X — компактное пространство и R — отношение эквивалентности в X, классами которого служат связные компоненты пространства X. Тогда факторпространство X/R компактно и вполне несвязно.*

Мы уже знаем (гл. I, § 11, предложение 9), что X/R вполне несвязно; все сводится к доказательству *отделимости* X/R (гл. I, § 10, предложение 8). Пусть A и B — две различные связные компоненты пространства X; в силу предложения 6 существует такое окружение U для X, что ни одна точка из A не может быть соеди-

нена U-цепью ни с одной точкой из B. Но множество V (соотв. W) всех точек из X, соединимых U-цепью с точкой $x \in A$ (соотв. $y \in B$), открыто-замкнуто в X (предложение 5) и содержит A (соотв. B); таким образом, эти множества являются непересекающимися открытыми окрестностями соответственно множеств A и B, насыщенными по R, и предложение доказано.

Упражнения

*1) Пусть $\mathfrak{R}$ — открытое покрытие компактного пространства X; показать, что существует такое окружение V для X, что $V(x)$ при любом $x \in X$ содержится в некотором множестве, принадлежащем $\mathfrak{R}$. [Заметить, что при любом $x \in X$ существует окружение W_x для X, такое, что $\overset{2}{W}_x(x)$ содержится в некотором множестве из $\mathfrak{R}$, и покрыть X конечным числом множеств $W_x(x)$.]

2) Для того чтобы квазикомпактное пространство X было равномеризуемым, необходимо и достаточно, чтобы его топология была прообразом топологии компактного пространства Y относительно сюръективного отображения f: $X \to Y$.

3) Пусть f — непрерывное отображение компактного пространства X в компактное пространство Y и V — такое открытое окружение для X, что $f(x)=f(y)$ влечет $(x, y) \in V$. Показать, что существует окружение W для Y такое, что уже $(f(x), f(y)) \in W$ влечет $(x, y) \in V$.

4) Пусть X — локально компактное пространство, определенное в упражнении 12 § 9 гл. I. Показать, что всякая окрестность диагонали Δ в $X \times X$ содержит множество вида $[x, b[\times [x, b[$. Вывести отсюда, что в X имеется только одна равномерная структура, согласующаяся с его топологией, и что пополнение X по этой равномерной структуре отождествимо с интервалом $X' = [a, b]$, наделенным топологией $\mathscr{T}_-(X')$. [Заметить, что всякий ультрафильтр в X необходимо является фильтром Коши в любой равномерной структуре, согласующейся с топологией пространства X.]

5) Для того чтобы равномерное пространство X было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы всякий ультрафильтр в X был фильтром Коши. [Для доказательства достаточности заметить, что если X не предкомпактно, то существует такое окружение V для X, что множества $\complement V(x)$, где x пробегает X, порождают фильтр в X.]

6) Пусть всякая последовательность точек равномерного пространства X имеет в нем по крайней мере одну предельную точку. Показать, что X предкомпактно. [Рассуждать от противного.]

7) Множество A в равномерном пространстве X называется *ограниченным*, если любому окружению V для X можно отнести конечное множество F и целое $n > 0$ такие, что $A \subset \overset{n}{V}(F)$.

а) Объединение двух ограниченных множеств ограниченно. Замыкание ограниченного множества ограниченно. Всякое предкомпактное множество ограниченно.

б) Если f: $X \to Y$ равномерно непрерывно, то образ при f всякого ограниченного множества из X есть ограниченное множество в Y.

в) Для того чтобы подмножество произведения непустых равномерных пространств было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы каждая его проекция была ограниченна.

г) Пусть R_V для любого симметричного окружения V равномерной структуры пространства X означает объединение всех множеств $\overset{n}{V}$ с целыми $n>0$; показать, что R_V открыто-замкнуто в $X \times X$ и что (в обозначениях n° 4) $R_V(x)=A_{x,V}$ для любого $x \in X$. Пусть $R_V=X \times X$ для каждого симметричного окружения V (что, в частности, справедливо, когда X связно); показать, что для ограниченности множества $A \subset X$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого симметричного окружения V и каждого $x_0 \in X$ существовало такое целое $n>0$, что $A \subset \overset{n}{V}(x_0)$.

8) Пусть X — равномерное пространство, V — замкнутое окружение для X и A — компактное множество в X; показать, что $V(A)$ замкнуто в X. [См. гл. I, § 10, следствие 5 теоремы 1.]

*9) Пусть X — локально компактное пространство, наделенное равномерной структурой, согласующейся с его топологией и такой, что существует окружение V, для которого $V(x)$ относительно компактно в X при любом $x \in X$.

а) Показать, что X полно в этой равномерной структуре.

б) Пусть U — такое симметричное окружение для X, что $\overset{2}{U} \subset V$; показать, что $U(A)$ относительно компактно в X вместе с A.

в) Показать, что X паракомпактно. [Использовать б), упражнение 7 и теорему 5 § 9 гл. I.]

г) Пусть W— такое замкнутое симметричное окружение для X, что $\overset{2}{W} \subset V$; показать, что $W(A)$ замкнуто в X для любого замкнутого множества A из X. [Использовать упражнение 8.]

10) Пусть X — отделимое равномерное пространство, обладающее окружением V таким, что $V(x)$ предкомпактно при любом $x \in X$. Показать, что пополнение $\hat{X}$ пространства X локально компактно и удовлетворяет условиям упражнения 9. [Показать, что если W — открытое симметричное окружение для X такое, что $\overset{3}{W} \subset V$, то его замыкание $\overline{W}$ в $\hat{X} \times \hat{X}$ обладает тем свойством, что $\overline{W}(x)$ компактно при любом $x \in \hat{X}$.]

*11) Пусть X — отделимое равномерное пространство, $\mathcal{U}$ — его равномерная структура и $\mathfrak{F}(X)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства X, наделенное равномерной структурой, индуцируемой равномерной структурой $\tilde{\mathcal{U}}$ упражнения 5а § 1.

а) Показать, что если X предкомпактно, то $\mathfrak{F}(X)$ предкомпактно. [Показать, что если (A_i) — конечное покрытие пространства X множествами, малыми порядка V (где V симметрично), то множества $\tilde{V}(B_k)$, где B_k — всевозможные объединения множеств A_i, образуют покрытие пространства $\mathfrak{F}(X)$.]

б) Для того чтобы точка $A \in \mathfrak{F}(X)$ обладала тем свойством, что всякая ее окрестность в топологии, индуцируемой в $\mathfrak{F}(X)$ топологией $\mathscr{T}(\tilde{\mathscr{U}})$, содержала ее окрестность в топологии, индуцируемой в $\mathfrak{F}(X)$ топологией $\mathscr{T}_\Theta$ (гл. I, § 8, упражнение 12), необходимо и достаточно, чтобы A было предкомпактно.

в) Показать, что в множестве $\mathfrak{K}(X)$ всех компактных подмножеств пространства X топологии, индуцируемые топологиями $\mathscr{T}(\tilde{\mathscr{U}})$ и $\mathscr{T}_\Theta$, совпадают. [Использовать б) и упражнение 5 § 1.]

*12) а) Пусть R — некоторая булева алгебра, образованная подмножествами множества Ω. Каждому конечному разбиению $\omega=(A_i)$ множества Ω, состоящему из множеств, принадлежащих R, сопоставим в $\Omega\times\Omega$ множество $C_\omega = \bigcup_i (A_i \times A_i)$. Показать, что множества C_ω образуют фундаментальную систему окружений некоторой отделимой равномерной структуры в Ω. Пополнение $\hat{\Omega}$ пространства Ω по этой структуре есть вполне несвязное компактное пространство; для того чтобы множество из $\hat{\Omega}$ было открыто-замкнуто в $\hat{\Omega}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было вида $\overline{A}$, где $A \in R$. Показать, что $A \mapsto \overline{A}$ есть такое биективное отображение булевой алгебры R на множество всех открыто-замкнутых подмножеств пространства $\hat{\Omega}$, что $\overline{\mathbf{C}A} = \mathbf{C}\overline{A}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. В случае, когда R_0 — произвольная булева алгебра, а R — булева алгебра, изоморфная алгебре подмножеств множества Ω всех максимальных предфильтров из R_0 (гл. I, § 6, упражнение 20), показать, что каноническое отображение $\Omega \to \hat{\Omega}$ биективно, иными словами, что Ω компактно.

б) Пусть X — отделимое топологическое пространство, открыто-замкнутые подмножества которого образуют базис его топологии. Примем за R булеву алгебру, образованную всеми открыто-замкнутыми множествами из X; топология, индуцируемая в X топологией пополнения $\hat{X}$ пространства X по равномерной структуре $\mathscr{U}$, определенной в а), совпадает с исходной топологией пространства X. Кроме того, максимальные элементы множества всех фильтров в X, обладающих базисом из открытых множеств, и множества всех фильтров в X, обладающих базисом из замкнутых множеств, являются фильтрами Коши для $\mathscr{U}$. Вывести отсюда, что существуют непрерывные сюръективные отображения $\varphi\colon \tilde{X} \to \hat{X}$ и $\psi\colon X' \to \hat{X}$ топологических пространств $\tilde{X}$ и X', определенных в упражнениях 26 и 25 § 9 гл. I. °Показать, что если X — рациональная прямая $\mathbf{Q}$, то отображение ψ не биективно.° Если X экстремально несвязно (гл. I, § 11, упражнение 21), то ψ

биективно, а $\hat{X}$ экстремально несвязно и отождествимо с полурегулярным пространством, ассоциированным с X' (гл. I, § 8, упражнение 20); таким образом, экстремально несвязные пространства могут быть охарактеризованы как всюду плотные подпространства экстремально несвязных компактных пространств. Получить отсюда пример экстремально несвязного компактного пространства без изолированных точек [см. гл. I, § 11, упражнение 21e]. В частности, если взять в качестве X дискретное пространство, то $\hat{X}$ отождествится с пространством всех ультрафильтров в X (гл. I, § 9, упражнение 27).

13) Пусть X — локально компактное пространство, U — открытое множество в X, B — объединение множества U и всех относительно компактных связных компонент его дополнения $\mathbf{C}U$; показать, что B открыто и является объединением U и тех подмножеств из $\mathbf{C}U$, которые открыты и компактны в $\mathbf{C}U$. [Погрузить X в его компактификацию Александрова $X'=X\cup\{\omega\}$, заметить, что в $X'-U$ связной компонентой точки ω служит $\{\omega\}\cup\mathbf{C}B$, и воспользоваться предложением 6.]

14) Пусть X — компактное пространство и $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в X, образованный связными замкнутыми множествами; показать, что (непустое) пересечение всех множеств из $\mathfrak{B}$ есть связное замкнутое множество. [Рассуждать от противного, используя предложение 4 этого параграфа и теорему 1 § 9 главы I.]

15) Пусть X — компактное пространство; тогда пространство $\mathfrak{F}(X)$ всех его непустых замкнутых подмножеств, наделенное топологией, индуцируемой топологией $\mathscr{T}(\mathscr{U})$ (упражнение 11), будет компактным (гл. I, § 9, упражнение 14). Рассмотрим в нем ультрафильтр Ψ и предположим, что для каждого окружения V равномерной структуры пространства X и каждого $\mathfrak{X}\in\Psi$ существует такое $M\in\mathfrak{X}$, что любые две точки из M соединимы V-цепью, содержащейся в M. Показать, что предел A фильтра Ψ в $\mathfrak{F}(X)$ есть связное подмножество пространства X. [Применить предложение 6.]

*16) Пусть X — связное компактное пространство, A и B — непустые замкнутые множества в X без общих точек. Показать, что существует связная компонента множества $\mathbf{C}(A\cup B)$, имеющая точки прикосновения в A и в B. [Пусть U — такое окружение равномерной структуры пространства X, что $\overset{2}{U}(A)\cap\overset{2}{U}(B)=\varnothing$. Показать сперва, что множество $\mathfrak{M}_U$ всех связных компонент множества $\mathbf{C}(U(A)\cup U(B))$, имеющих непустое пересечение и с $\overline{U(A)}$ и $\overline{U(B)}$, не пусто; доказать для этого, что для каждого симметричного окружения $W\subset U$ существуют $x\in U(A)$, $y\in U(B)$ и соединяющая их W-цепь, все отличные от x и y точки которой принадлежат $\mathbf{C}(U(A)\cup U(B))$; применить затем упражнение 15. Показать, что для каждого окружения $V\subset U$ всякое множество $K\in\mathfrak{M}_V$ содержит некоторое множество $H\in\mathfrak{M}_U$ и что множество $\mathfrak{N}_{U,V}$ всех $H\in\mathfrak{M}_U$, содержащихся в множестве $K\in\mathfrak{M}_V$,

замкнуто в $\mathfrak{F}(X)$; заключить отсюда, что пересечение множеств $\mathfrak{N}_{U,V}$, где V пробегает все окружения, содержащиеся в U, не пусто.]

17) Пусть X — связное локально компактное пространство. Показать, что для любого непустого компактного множества K из X, отличного от X, всякая его связная компонента имеет непустое пересечение с границей K в X. [Использовать следствие предложения 6.] Вывести отсюда, что для любого непустого открытого относительно компактного множества A из X, отличного от X, всякая его связная компонента имеет по крайней мере одну точку прикосновения в $\mathbf{C}A$.

*18) а) Показать, что связное компактное пространство X не может быть объединением счетно-бесконечного множества непустых попарно не пересекающихся замкнутых множеств. [Рассуждать от противного; с помощью упражнения 17 показать, что если (F_n) — счетно-бесконечное разбиение пространства X, состоящее из замкнутых множеств, то существует связное компактное множество K, не пересекающееся с F_1, но пересекающееся с бесконечным числом множеств F_n; рассмотреть для этого связную компоненту какой-либо точки из F_2 относительно компактной окрестности множества F_2, не пересекающейся с F_1. Рассуждать затем по индукции.]

б) Распространить результат а) на случай связного локально компактного пространства X, сделав одно из следующих двух дополнительных предположений: 1) некоторое F_n компактно и связно, 2) X локально связно. [В первом случае свести к а) с помощью упражнения 17.]

°в) Пусть X — подпространство в $\mathbf{R}^3$, являющееся объединением подпространств A_n, B_n, C_n, где A_n — полупрямые $x>0$, $y=1/n$, $z=0$ $(n\geqslant 1)$; B_n — интервалы $2n<x<2n+2$, $y=0$, $z=0$ $(n\geqslant 0)$; C_n — множества, определенные соотношениями $x=2n+1$, $0\leqslant y\leqslant 1/(n+1)$, $z=y(y-1/(n+1))$ $(n\geqslant 0)$. Показать, что X локально компактно, связно и является объединением счетного семейства попарно не пересекающихся связных замкнутых подпространств.

*19) Говорят, что связное компактное пространство X *неприводимо* между двумя своими точками x, y, если в X не существует отличного от X связного компактного множества, содержащего x и y.

а) Показать, что для любых двух различных точек x и y связного компактного пространства X в X существует неприводимое между x и y связное компактное подпространство K. [Использовать упражнение 14 и теорему Цорна.]

б) Показать, что связное компактное пространство, имеющее по крайней мере две различные точки, не может быть неприводимым между каждыми двумя своими точками. [Использовать упражнение 17.]

в) Пусть X — связное компактное пространство; предположим, что существует точка $a\in X$, имеющая связную замкнутую окрестность V, отличную от X. Показать, что для любых двух точек x и y из $\mathbf{C}V$ в X существует связное компактное множество, содержащее x и одну из

точек a или y, но не обе. [Использовать упражнение 17.] При тех же предположениях показать, что, каковы бы ни были три различные точки x, y, z пространства X, оно не может быть одновременно неприводимо между x и y, между y и z и между z и x.

*20) Пусть X — связное компактное пространство, L — множество всех точек из X, обладающих фундаментальной системой связных окрестностей; точки из $S = \mathbf{C}L$ называются *сингулярными* точками пространства X. Точки внутренности $\overset{\circ}{L}$ множества L и связные компоненты множества $\overline{S}$ называются *простыми составляющими* пространства X.

а) Пусть A — непустое открытое множество в X, отличное от X, K — связная компонента его замыкания $\overline{A}$ и F — замыкание множества $\overline{A} \cap \mathbf{C}K$; показать, что если $A \cap K \cap F$ не пусто, то все его точки сингулярны. Если $x \in A \cap K \cap F$, то связная компонента Q точки x в F пересекается с $\mathbf{C}A$. [Рассматривая точку из $\mathbf{C}K$, содержащуюся в $V(x)$, и ее связную компоненту в $\overline{A}$, показать с помощью упражнения 17, что множество всех точек из F, соединимых с x посредством V-цепи, содержащейся в F, пересекается с $\mathbf{C}A$.] Вывести отсюда, что простая составляющая P, содержащая x, пересекается с $\mathbf{C}A$. [Заметить, что P содержит связную компоненту точки x в $Q \cap A$, и использовать упражнение 17 в применении к связному компактному пространству Q и открытому множеству $Q \cap A$ в этом пространстве.]

б) Вывести из а), что если P — простая составляющая пространства X, то любая ее окрестность U содержит связную окрестность. [Рассуждать от противного.]

в) Пусть V — симметричное окружение для X; обозначим через V' множество всех тех пар (x, y) точек из X, для которых существует V-цепь, соединяющая x и y, все точки которой, кроме, может быть, x и y, сингулярны. Когда V пробегает множество всех симметричных окружений для X, соответствующие множества V' образуют фундаментальную систему окружений некоторой (вообще говоря, неотделимой) равномерной структуры в X; пусть X' — ассоциированное отделимое пространство; показать, что прообразы точек из X' относительно канонического отображения $X \to X'$ суть простые составляющие пространства X. Пространство X' (компактное и связное) называется *пространством простых составляющих* пространства X. Показать, что X' *локально связно*. [Использовать б) и предложение 8 § 10 гл. I.]

°г) Пусть (r_n) — последовательность всех рациональных чисел, содержащихся в $]0, 1[$, расположенных в каком-либо порядке. Для каждого иррационального x из $[0, 1]$ положим $f(x) = \sum_n 2^{-n} \sin 1/(x - r_n)$.

Пусть X — замыкание в $\mathbf{R}^2$ графика функции f. Показать, что X связно и неприводимо между точками с абсциссами 0 и 1, но имеет только одну простую составляющую.

°21) Пусть X — локально компактное подпространство пространства $\mathbf{R}^2$, образованное точками $(1/n, y)$, где n — целое $\geqslant 1$, а $-1 \leqslant y \leqslant 1$, и точками $(0, y)$, где $-1 \leqslant y < 0$, либо $0 < y \leqslant 1$, либо $y=2$. Пусть S — отношение эквивалентности в X, классами которого служат связные компоненты пространства X. Показать, что факторпространство X/S неотделимо.°

22) Показать, что всякое вполне несвязное компактное пространство X гомеоморфно проективному пределу некоторой проективной системы конечных дискретных пространств. [Рассмотреть конечные разбиения пространства X на открытые множества и использовать следствие предложения 6.]

*23) Пусть X и Y — локально компактные пространства и $f\colon X \to Y$ — сюръективное открытое непрерывное отображение.

а) Показать, что $f(C)=K$ для каждого связного компактного множества K из Y и любой компактной связной компоненты C его прообраза $f^{-1}(K)$. [Свести к случаю, когда $K=Y$, и использовать следствие предложения 6.] °Дать пример некомпактной связной компоненты C' множества $f^{-1}(K)$, для которой $f(C') \neq K$.°

б) Предположим еще, что Y локально связно. Показать, что $f(R)=U$ для каждого открытого связного множества U из Y и любой относительно компактной (в X) связной компоненты R его прообраза $f^{-1}(U)$. [Заметить, что в локально связном локально компактном пространстве всякое открытое связное множество U есть объединение всех его связных компактных подмножеств, содержащих заданную точку $y_0 \in U$; применить затем а).]

в) Предположим еще, что X локально связно. Показать, что для всякого связного множества K из Y, являющегося открытым, либо компактным с непустой внутренностью, и каждого компактного множества H из X существует только конечное число связных компонент множества $f^{-1}(K)$, содержащихся в H. [Использовать а) и б).]

24) Пусть X — локально связное локально компактное пространство, Y — отделимое пространство, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и x — такая точка из X, что подпространство $f^{-1}(f(x))$ пространства X вполне несвязно. Показать, что когда U пробегает фундаментальную систему окрестностей точки $f(x)$ в Y, связные компоненты точки x в множествах $f^{-1}(U)$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки x. [Рассуждать от противного, используя упражнение 14.]

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ II

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

Основные понятия и предложения, относящиеся к равномерным пространствам, выявлялись в теории вещественных переменных постепенно и только в недавнее время сделались объектом систематического изучения. Коши, в поисках строгого обоснования теории рядов (см. Исторические очерки к гл. I и IV), принял за отправной пункт представлявшийся ему, по-видимому, очевидным, принцип, согласно которому для того, чтобы последовательность (a_n) была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы $|a_{n+p}-a_n|$ было сколь угодно мало для всех достаточно больших n (см., например, (II)). Вместе с Больцано (I), он был, несомненно, одним из первых, кто явно сформулировал этот принцип и понял его значение; отсюда и название «последовательность Коши», данное последовательностям вещественных чисел, удовлетворяющим приведенному выше условию, и распространенное на последовательности точек метрического пространства (гл. IX), обладающие тем свойством, что расстояние между x_{n+p} и x_n сколь угодно мало при достаточно большом n; отсюда, наконец, название «фильтр Коши», данное обобщению последовательностей Коши, изучавшемуся в этой главе.

Когда в дальнейшем перестали удовлетворяться интуитивным понятием вещественного числа и в целях надежного обоснования анализа стали искать определение вещественных чисел, отправляясь от рациональных чисел, как раз принцип Коши привел к наиболее плодотворному из определений, предложенных во второй половине XIX века; мы имеем в виду определение Кантора (III) (развитое по идеям Кантора, наряду с другими, также Гейне (V) и, без сомнения независимо, Мерэ), согласно которому каждой последовательности Коши («фундаментальной последовательности» по терминологии Кантора) рациональных чисел сопоставляется вещественное число, причем одно и то же вещественное число относится двум последовательностям Коши рациональных чисел (a_n) и (b_n) в том и только том случае, когда $|a_n-b_n|$ стремится к нулю. Основная идея состоит здесь в том, что с известной точки зрения (а именно, на самом деле, с точки зрения «равномерной структуры», определенной в этой главе, § 1, n° 1, пример 1) множество Q всех рациональных чисел «не полно» и множество вещественных чисел есть «полное» множество, получаемое путем «пополнения» Q.

С другой стороны, Гейне в работах, в значительной степени навеянных идеями Вейерштрасса и Кантора, впервые определил равномерную непрерывность для числовых функций одной или нескольких вещественных переменных (IV) и доказал, что всякая числовая функция, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале из $\mathbf{R}$, равномерно непрерывна (V) («теорема Гейне»). По теореме 2 § 4 этот результат связан с компактностью замкнутого ограниченного интервала в $\mathbf{R}$ («теорема Бореля — Лебега», гл. IV, § 2, теорема 2; см. Исторические очерки к гл. I и IV), и данное Гейне доказательство его теоремы может также с некоторыми видоизменениями служить для доказательства теоремы Бореля — Лебега (что показалось некоторым авторам достаточным основанием для наименования последней «теоремой Гейне — Бореля»).

Распространение этих идей на более общие пространства началось после того, как стали изучать, сначала на частных случаях, а потом в общем виде, метрические пространства (см. гл. IX), где задано расстояние (числовая функция пар точек, удовлетворяющая некоторым аксиомам), определяющее сразу и топологию и равномерную структуру. Фреше, который первым дал общее определение этих пространств, понял важность принципа Коши (VI) и доказал также для метрических пространств теорему, равносильную теореме 3 § 4 ((VI) и (VII)); Хаусдорф, который в своей монографии «Mengenlehre» ((VIII), см. также (VIII bis)) далеко продвинул теорию метрических пространств, уяснил, в частности, что к этим пространствам применимо описанное выше построение Кантора, и получил таким путем из каждого «неполного» метрического пространства (т. е. пространства, в котором принцип Коши не выполняется) «полное» метрическое пространство.

Метрические пространства — это «равномерные пространства» специального типа; в общем виде равномерные пространства были определены лишь недавно А. Вейлем (IX). До этого понятия и результаты, относящиеся к «равномерным структурам», умели применять только к метрическим пространствам; это и объясняет ту важную роль, которую метрические или метризуемые пространства (в частности, метризуемые компактные пространства) играют во многих современных работах по топологии в вопросах, где расстояние в действительности совершенно не нужно. После того как определение равномерного пространства сформулировано, не представляет никакого труда (особенно располагая также понятием фильтра) распространить на эти пространства почти всю теорию метрических пространств в том виде, как она изложена, например, у Хаусдорфа (и точно так же распространить, например, на все компактные пространства результаты, изложенные для метрических компактных пространств в «Топологии» Александрова и Хопфа (X)). Это и сделано в настоящей главе; в частности, теорема о пополнении равномерных пространств (§ 3, теорема 3) представляет собой не что иное, как перенесение без каких-либо существенных изменений канторовского построения вещественных чисел.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) B. Bolzano, Rein Analytischer Beweis der Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel liegt, Ostwald's Klassiker, n° 153, Leipzig, 1905. [Русский перевод: Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения. Приложение 1 к книге: Э. Кольман, Бернард Больцано, Изд-во АН СССР, 1955.]

(II) A. L. Cauchy, Sur la convergence des séries (Exercices D'Analyse, 2-e Année, Paris, 1827, стр. 221 = Ouvres (II), t. VII, Paris (Gauthier — Villars), 1889, стр. 267).

(III) G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Berlin (Springer), 1932.

(IV) E. Heine, Ueber trigonometrische Reihen, J. de Crelle, t. LXXI (1870), стр. 353—365.

(V) E. Heine, Die Elemente der Funktionenlehre, J de Crelle, t. LXXIV (1872), стр. 172—188.

(VI) M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Palermo, t. XXII (1906), стр. 1—74.

(VII) M. Fréchet. Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel, Rend. Palermo, t. XXX (1910), стр. 1—26.

(VIII) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (Veit), 1914.

(VIII bis) F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin (de Gruyter), 1927. [Русский перевод: Ф Хаусдорф, Теория множеств, Гостехиздат, 1937.]

(IX) A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Actual. Scient. et Ind., n° 551, Paris (Hermann), 1937.

(X) P. Alexandroff, H. Hopf. Topologie, I, Berlin (Springer), 1935.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

	Гл.	§	n°
$\mathring{A}$, $\overline{A}$ (A — множество в топологическом пространстве)	I	1	6
$\lim\limits_{\leftarrow} X_\alpha$ ((X_α) — проективная система топологических пространств)	I	4	4
$\lim_{\mathfrak{F}} f$, $\lim\limits_{x,\,\mathfrak{F}} f(x)$, $\lim\limits_{x} f(x)$	I	7	3
$\tilde{f}(a)$ ($\tilde{f}$ — росток отображения)	I	6	10
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	I	7	3
$\lim\limits_{x\in A} f(x)$ (A — фильтрующееся множество)	I	7	3
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	I	7	4
$\lim\limits_{x\to a,\, x\in A} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a,\, x\neq a} f(x)$	I	7	5
f_T	I	5	1
ιX	I	10	
$\mathrm{Fr}\,(A)$ (A — множество в топологическом пространстве)	I	1	упр. 5
$\mathscr{T}_0(X)$, $\mathscr{T}_+(X)$, $\mathscr{T}_-(X)$	I	2	упр. 5
$\mathfrak{P}_0(X)$, $\mathscr{T}_\Omega$, $\mathscr{T}_\Phi$	I	2	упр. 7
$\mathfrak{F}(X)$, $\mathscr{T}_\Theta$	I	8	упр. 12
$\mathscr{T}^*$	I	8	упр. 20
$\mathfrak{K}(X)$	I	9	упр. 13
$\lim\limits_{\leftarrow} X_\alpha$ ((X_α) — проективная система равномерных пространств)	II	2	7
$\hat{X}$ (отделимое пополнение равномерного пространства X)	II	3	7
$\tilde{\mathscr{U}}$, $\mathscr{T}(\tilde{\mathscr{U}})$	II	1	упр. 5

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

	Гл.	§	n°
Аксиома Бореля — Лебега	I	9	1
— Хаусдорфа	I	8	1
Александрова компактификация	I	9	8
— теорема	I	9	8
Ассоциированная с фильтром топология	I	6	5
Ассоциированное с равномерным пространством отделимое равномерное пространство	II	3	8
Базис топологии	I	1	3
— фильтра	I	6	3
Близкие порядка V точки	II	1	1
Более сильная равномерная структура	II	2	2
— — топология	I	2	2
Более сильный фильтр	I	6	2
Бореля — Лебега аксиома	I	9	1
Верхняя грань множества равномерных структур	II	2	5
— — — топологий	I	2	3
Взаимно непрерывное отображение	I	2	1
Внешность множества	I	1	6
Внешняя точка	I	1	6
Внутренность множества	I	1	6
Внутренняя точка	I	1	6
Вполне несвязное множество, пространство	I	11	5
Всюду плотное множество	I	1	6
Гомеоморфизм	I	1	1
Гомеоморфные топологические пространства	I	1	1
Граница множества	I	1	6
Граничная точка	I	1	6
Дискретная равномерная структура	II	1	1
— топология	I	1	1
Дискретное равномерное пространство	II	1	1
— топологическое пространство	I	1	1
Замкнутое множество	I	1	4
— отношение эквивалентности	I	5	2
— отображение	I	5	1
— покрытие	I	1	4
Замыкание множества	I	1	6
Значение ростка отображения в точке	I	6	10
Изолированная точка	I	1	6
Изоморфизм равномерного пространства на равномерное пространство	II	1	1
Изоморфные равномерные пространства	II	1	1

	Гл.	§	n°
Индуцированная равномерная структура	II	2	4
Индуцированный фильтр	I	6	5
Инициальная равномерная структура	II	2	3
— *топология*	I	2	3
Квазикомпактное множество	I	9	3
— *пространство*	I	9	1
Квазимаксимальная топология	I	2 упр. 6	
Колмогоровское пространство	I	1 упр. 2	
Компактификация Александрова	I	9	8
Компактное множество	I	9	3
— *пространство*	I	9	1
Компонента связная	I	11	5
Коши последовательность	II	3	1
— *критерий*	II	3	3
— *фильтр*	II	3	1
Критерий Коши	II	3	3
Локально замкнутое множество	I	3	3
— *компактное пространство*	I	9	7
— *конечное семейство*	I	1	5
— *связное пространство*	I	11	6
Мажорируемая равномерная структура	II	2	2
— *топология*	I	2	2
Мажорируемый фильтр	I	6	2
Мажорирующая равномерная структура	II	2	2
— *топология*	II	2	2
Мажорирующий фильтр	I	6	2
Малое порядка V множество	II	3	1
Менее сильная равномерная структура	II	2	2
— — *топология*	I	2	2
Менее сильный фильтр	I	6	2
Минимальный фильтр Коши	II	3	2
Миттаг-Леффлера теорема	II	3	5
Множество вполне несвязное	I	11	5
— *всюду плотное*	I	1	6
— *замкнутое*	I	1	4
— *квазикомпактное*	I	9	3
— *компактное*	I	9	3
— *локально конечное подмножеств*	I	1	5
— *малое порядка V*	II	3	1
— *как носитель топологического пространства*	I	1	1
— *открытое*	I	1	1
— *относительно компактное, относительно квазикомпактное*	I	9	3
— *плотное*	I	1	6
— *предкомпактное*	II	4	2
— *связное*	I	11	1
— *совершенное*	I	1	6
— *фильтрующееся*	I	6	1
— *элементарное*	I	4	1
Непрерывное относительно подпространства отображение	I	3	2
— *отображение*	I	2	1
Нижняя грань множества топологий	I	2	4
Носитель равномерного пространства	II	1	2
— *топологического пространства*	I	1	1
Образующих топологии система	I	2	3
— *фильтра система*	I	6	2
Окрестность множества, точки	I	1	2

	Гл.	§	n°
Окрестность порядка V множества	II	1	2
Окружение равномерной структуры	II	1	1
— *симметричное*	II	1	1
Отделимая равномерная структура	II	1	2
— *топология*	I	8	1
Отделимое отношение эквивалентности	I	8	3
— *пополнение равномерного пространства*	II	3	7
— *равномерное пространство, ассоциированное с равномерным пространством*	II	3	8
— *топологическое пространство*	I	8	1
Открытое множество	I	1	1
— *отношение эквивалентности*	I	5	2
— *отображение*	I	5	1
— *покрытие*	I	1	1
Относительно квазикомпактное множество	I	9	3
— *компактное множество*	I	9	3
Отношение эквивалентности отделимое	I	8	3
— — *замкнутое, открытое*	I	5	2
Отображение взаимно непрерывное	I	2	1
— *замкнутое*	I	5	1
— *непрерывное*	I	2	1
— *открытое*	I	5	1
— *равномерно непрерывное*	II	2	1
— *совершенное*	I	10	1
Отождествление точек каждого класса эквивалентности	I	3	4
Паракомпактное пространство	I	9	10
Пересечение фильтров	I	6	2
Плотное множество	I	1	6
Подпространство локально замкнутое	I	3	3
— *равномерного пространства*	II	2	4
— *топологического пространства*	I	3	1
Покрытие замкнутое	I	1	4
— *открытое*	I	1	1
Полное равномерное пространство	II	3	3
Пополнение отделимого равномерного пространства	II	3	7
— *равномерного пространства*	II	3	3
Порожденная множеством подмножеств топология	I	2	3
— *равномерной структурой топология*	II	1	2
Порожденный множеством подмножеств фильтр	I	6	2
Последовательность Коши	II	3	1
— *сходящаяся*	I	7	3
Предел последовательности	I	7	3
— *проективный равномерных пространств, равномерных структур*	II	2	7
— — *топологических пространств, топологий*	I	4	4
— *ростка отображения*	I	7	3
— *фильтра, базиса фильтра*	I	7	1
— *функции в точке относительно подмножества*	I	7	5
— — *по фильтру, функции по фильтрующемуся множеству, ростка отображения*	I	7	3

	Гл.	§	n°
Предельная точка функции по фильтру	I	7	3
Предкомпактное множество, пространство	II	4	2
Примитивное множество	I	7	упр. 8
Принцип продолжения тождеств	I	8	1
Продолжение отображения по непрерывности	I	8	5
Произведение равномерных пространств, равномерных структур	II	2	6
— *топологических пространств, топологий*	I	4	1
— *фильтров*	I	6	7
Прообраз равномерной структуры	II	2	4
— *топологии*	I	2	3
Пространств равномерных произведение	II	2	6
— *сумма*	I	2	4
Пространство абсолютно замкнутое	I	9	упр. 19
— *вполне несвязное*	I	11	5
— *достижимое*	I	8	упр. 1
— *колмогоровское*	I	1	упр. 2
— *компактное*	I	9	1
— *Линделефа*	I	9	упр. 15
— *локально квазикомпактное*	I	9	упр. 30
— — *компактное*	I	9	7
— — —, *счетное в бесконечности*	I	9	9
— — *связное*	I	11	6
— *минимальное*	I	9	упр. 20
— *отделимое*	I	8	1
Пространство отделимое равномерное, ассоциированное с равномерным пространством	II	3	8
— *паракомпактное*	I	9	10
— *полное*	II	3	3
— *полурегулярное*	I	8	упр. 20
— *предкомпактное*	II	4	2
— *равномеризуемое*	II	4	1
— *равномерное*	II	1	1
— *рациональное n-мерное*	I	4	1
— *регулярное*	I	8	4
— *связное*	I	11	1
— *совершенно отделимое*	I	9	упр. 21
— *субмаксимальное*	I	8	упр. 22
— *топологическое*	I	1	1
— — *как носитель равномерного пространства*	II	1	2
— *ультрарегулярное*	I	8	упр. 25
— *ультрафильтров*	I	9	упр. 27
— *хаусдорфово*	I	8	1
— *экстремально несвязное*	I	11	5
Прямая рациональная	I	1	2
Пуанкаре — Вольтерра теорема	I	11	7
Равномеризуемое топологическое пространство, равномеризуемая топология	II	4	1
Равномерно непрерывное отображение	II	2	1
Равномерное пространство	II	1	1
Равномерные структуры, согласующиеся с топологией	II	4	1

	Гл	§	n°
Разбиений конечных равномерная структура	II	2	2
Разрешимое пространство	I	2	упр 11
Рациональная прямая	I	1	2
Регулярная топология	I	8	4
Регулярное топологическое пространство	I	8	4
Росток множества по фильтру	I	6	9
— *отображения множества в точке*	I	6	10
Связная компонента точки, множества	I	11	5
Связное множество	I	11	1
— *пространство*	I	11	1
Семейство локально конечное	I	1	5
Сечение непрерывное	I	3	5
Симметричное окружение	II	1	1
Система образующих фильтра	I	6	2
— — *топологии*	I	2	3
— *проективная подмножеств*	I	Прил.	1
— — *равномерных пространств, равномерных структур*	II	2	7
— — *топологических пространств, топологий*	I	1	4
— *фундаментальная окрестностей*	I	1	3
— — *окружений*	II	1	1
Склеивание множеств, топологических пространств	I	2	5
Совершенное множество	I	1	6
— *отображение*	I	10	1
Соответствие совершенное	I	10	упр. 10
Сравнимые равномерные структуры	II	2	2
— *топологии*	I	2	2
— *фильтры*	I	6	2
Структура равномерная	II	1	1
— — *p-адическая*	II	1	1
— — *дискретная*	II	1	1
— — *индуцированная*	II	2	2
— — *конечных открытых покрытий*	II	4	1
— — — *разбиений*	II	2	2
— — *мажорируемая, мажорирующая, более слабая, более сильная*	II	2	2
— — *отделимая*	II	1	2
— —, *согласующаяся с топологией*	II	4	1
— —, *сравнимая*	II	2	2
— *топологическая*	I	1	1
Структур равномерных произведение	II	2	6
Сумма топологических пространств (топологий)	I	2	4
Сходящаяся последовательность	I	7	3
Сходящийся базис фильтра	I	7	1
— *фильтр*	I	7	1
Счетное в бесконечности локально компактное пространство	I	9	9
Теорема Александрова	I	9	8
— *Миттаг-Леффлера*	II	3	5
— *Пуанкаре — Вольтерра*	I	11	7
— *Тихонова*	I	9	5
Тихонова теорема	I	9	5
Топологий произведение	I	2	3
— *сумма*	I	2	4
Топологическое пространство	I	1	1
— *фактор пространство*	I	3	4

	Гл.	§	n°
Топология	I	1	1
— *ассоциированная с фильтром*	I	6	5
— *дискретная*	I	1	1
— *индуцированная*	I	2	3
— *инициальная*	I	2	3
— *левая*	I	1	упр. 2
— *мажорируемая, мажорирующая, менее сильная, более сильная*	I	2	2
— *А-максимальная*	I	3	упр. 11
— *отделимая*	I	8	1
— *полурегулярная, ассоциированная с некоторой топологией*	I	8	упр. 20
— *порождаемая множеством подмножеств*	I	2	3
— — *равномерной структурой*	II	1	2
— *правая*	I	1	упр. 2
— *равномеризуемая*	II	4	1
— *регулярная*	I	8	4
— *сравнимая*	I	2	2
— *финальная*	I	2	4
— *хаусдорфова*	I	8	1
Точка	I	1	1
— *внешняя*	I	1	6
— *внутренняя множества*	I	1	6
— *граничная*	I	1	6
— *изолированная*	I	1	6
— *прикосновения базиса фильтра*	I	7	2
— — *множества*	I	1	6
Ультрафильтр	I	6	4
— *тривиальный*	I	6	4
Факторпространство топологическое	I	3	4
Фактортопология	I	3	4
Фильтр	I	6	1
— *более сильный (более слабый)*	I	6	2
— *индуцированный*	I	6	5
— *Коши*	II	3	1
— — *минимальный*	II	3	2
— *мажорируемый (минорируемый)*	I	6	2
— *порожденный множеством подмножеств*	I	6	2
— *сечений*	I	6	3
— *сравнимый*	I	6	2
— *сходящийся*	I	7	1
— *Фреше*	I	6	1
— *элементарный*	I	6	8
Фильтров пересечение	I	6	2
Фильтрующееся множество	I	6	1
Финальная топология	I	2	4
Фреше фильтр	I	6	1
Функция непрерывная	I	2	1
— *равномерно непрерывная*	II	2	1
Хаусдорфа аксиома, пространство, топология	I	8	1
Цепь (V-цепь)	II	4	4
Экстремально несвязное множество	I	11	упр. 21
Элементарное множество	I	4	1
Элементарный фильтр	I	6	8
— —, *ассоциированный с последовательностью*	I	6	8

ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ ВТОРОГО*) И ТРЕТЬЕГО ИЗДАНИЙ

2-е издание	3-е издание
Глава I	
§ 1	
Опр. 5	Опр. 7
— 6	— 9
— 7	— 10
Предл. 3	Предл. 5
Опр. 8	Опр. 11
— 9	— 12
Упр. 1	Упр. 2а
— 2	— 2б
— 3	§ 2, Упр. 5
— 4	Опущено
— 5	Упр. 3
— 6	— 4
— 7	— 5
— 8	Опущено
— 9	Опущено
— 10	Упр. 9
— 11	Опущено
§ 2, Опр. 1	§ 2, Опр. 3
§ 2, Предл. 1	§ 2, Предл. 3
§ 2, Упр. 1	§ 1, Упр. 1
§ 2, — 2	§ 1, — 2а
§ 2, — 3	§ 2, — 4
§ 2, — 4	§ 2, — 5а
§ 2, — 6	§ 2, — 5г
§ 2, — 7	§ 1, — 7
§ 3	
Упр. 4	Упр 8
— 5	— 9
— 6	— 5

2-е издание	3-е издание
Глава I	
§ 4, Опр. 1	§ 2, Опр. 1
§ 4, Предл. 1	§ 2, Предл. 1
§ 4, Теор. 1	§ 2, Теор. 2
§ 4, Опр. 2	§ 2, Опр. 2
§ 4, Теор. 2	§ 2, Теор. 1
§ 4, — 3	§ 2, — 2
§ 4, — 4	§ 2, — 2
§ 4, Опр. 3	§ 2, — 2
§ 4, Упр 1	§ 2, n° 1, Прим. 3
§ 4, — 2	§ 2, Упр. 1
§ 4, — 3	§ 2, — 2
§ 4, — 4	Опущено
§ 4, — 5	§ 2, Упр. 9
§ 4, — 6	§ 2, — 3
§ 5	**§ 6**
Опр n ($1 \leqslant n \leqslant 3$)	Опр. n
Теор. 1	Предл. 1
Сл. теор. 1	Сл. 1 предл. 1
Предл. 1	Предл 2
— 2	— 3
— 3	— 4
Сл. предл. 3	Сл. предл. 4
Опр. 4	§ 1, Опр 5
Предл. 4	Сл. 2 предл. 1
Опр. 5	Опр. 4
Теор. 2	Теор. 1
Предл. 5	Предл. 5
Сл предл. 5	Сл. предл. 5
Предл 6	Предл. 6
— 7	— 8
Опр. 6	Опр. 5
Предл. 8	Предл. 9
— 9	— 10

*) Перевод со второго издания гл I—II вошел в состав книги: Н. Бурбаки, Общая топология; основные структуры, Физматгиз, Москва, 1958

2-е издание	3-е издание
Глава I	
Опр. 7	Опр. 7
Предл. 10	Предл. 11
Упр n ($1 \leqslant n \leqslant 8$)	Упр. n
— 9	Предл. 7
— n ($10 \leqslant n \leqslant 21$)	Упр. $n-1$
§ 6, Опр. 1	§ 7, Опр. 1
§ 6, Предл. 1	§ 7, Предл. 1
§ 6, — 2	§ 8, — 1
§ 6, Опр. 2	§ 8, Опр. 1
§ 6, Предл. 3	§ 8, Предл. 6
§ 6, — 4	§ 8, — 5
§ 6, Сл. предл. 4	§ 8, Сл. предл. 5
§ 6, Опр 3	§ 7, Опр. 2
§ 6, Предл. 5	§ 7, Предл 3
§ 6, — 6	§ 7, — 4
§ 6, Сл. предл. 6	§ 7, Сл. предл. 4
§ 6, Предл. 7	§ 8, Предл. 1
§ 6, Опр. 4	§ 7, Опр. 3
§ 6, Предл. 8	§ 7, Предл. 7
§ 6, — 9	§ 7, — 9
§ 6, Сл. 1 предл. 9	§ 7, Сл. 1 предл. 9
§ 6, Сл. 2 предл. 9	§ 7, Сл. 2 предл 9
§ 6, Предл. 10	§ 8, Сл. 1 предл. 2
§ 6, Теор. 1	Опущено
§ 6, Сл. теор. 1	§ 8, Теор. 1
§ 6, Опр. 5	§ 8, Опр. 2
§ 6, Предл. 11	§ 8, Предл. 12
§ 6, — 12	§ 8, — 13
§ 6, Упр 1	§ 7, Упр 1
§ 6, — 2	Опущено
§ 6, — 3	§ 7, Предл. 2
§ 6, — 4	§ 7, Упр. 3
§ 6, — 5	§ 8 — 1
§ 6, — 6	§ 2, — 8 и § 8, Упр. 5
§ 6, — 7	§ 8, — 7
§ 6, — 8	§ 8, — 2а
§ 6, — 9	§ 8, — 2б
§ 6, — 10	§ 8, — 3а
§ 6, — 11	§ 8, — 3б
§ 6, — 12	§ 8, Предл. 1
§ 6, — 13	§ 8, — 3
§ 6, — 14	§ 8, Упр. 14
§ 6, — 15	§ 8, — 14
§ 6, — 16	Опущено
§ 6, — 17	§ 8, Упр. 15а
§ 6, — 18	§ 8, — 15б
§ 6, — 19	§ 8, — 20
§ 6, — 20	§ 8, — 17
§ 7	§ 2, п° п° 3 и 4
§ 7, Упр. 2	§ 8, Упр. 13

2-е издание	3-е издание
Глава I	
§ 8, Опр. 1	§ 4, Опр. 1
§ 8, Теор. 1	§ 7, Сл. 1 предл. 10
§ 8, Сл. 1 теор. 1	§ 7, Сл. 2 предл. 10
§ 8, Сл 2 теор. 1	§ 4 Предл. 1
§ 8, Сл. 3 теор. 1	§ 4, Сл. 1 предл. 1
§ 8, Предл. 1	§ 4 Предл. 2
§ 8, — 2	§ 4, Сл. предл. 3
§ 8, — 3	§ 4, — — 4
§ 8, Сл. предл. 3	§ 4, — — 4
§ 8, Предл. 4	§ 4, Предл. 5
§ 8, — 5	§ 4, — 7
§ 8, Сл. предл. 5	§ 4, Сл. предл. 7
§ 8, Предл. 6	§ 8, Предл. 1
§ 8, Сл. 1 предл. 6	§ 8, — 2
§ 8, Сл. 2 предл. 6	§ 8, Сл. 2 предл. 2
§ 8, Предл. 7	§ 8, Предл. 7
§ 8, Теор. 2	§ 4, — 6
§ 8, Опр. 2	§ 6, Опр. 6
§ 8, Предл. 8	§ 8, Сл. теор. 1
§ 8, Упр. 1	§ 2, Упр. 9
§ 8, — 2	§ 4, — 1
§ 8, — 3	§ 4, — 2
§ 8, — 4	§ 2, Предл. 5
§ 8, — 5	§ 2, — 5
§ 8, — 6	§ 8, Упр. 16
§ 8, — 7	§ 7, — 5
§ 8, — 8	§ 8, Сл. теор. 1
§ 8, — 9	§ 8, Упр. 18
§ 8, — 10	§ 4, — 9
§ 8, — 11	§ 4, Предл. 8
§ 8, — 12	§ 4, Упр 3
§ 8, — 13	§ 4, — 4
§ 8, — 14	§ 4, — 5
§ 8, — 15	§ 4, — 6
§ 8, — 16	§ 4, — 7
§ 9, Опр. 1	§ 2, п° 4, пример 1 и § 3, Опр. 3
§ 9, Теор. 1	§ 3, Предл. 6
§ 9, Сл. теор. 1	§ 3, Сл. предл. 6
§ 9, Предл 1	§ 3 Предл. 8
§ 9, — 2	§ 3, — 9
§ 9 — 3	§ 3, — 7
§ 9, — 4	§ 3, — 10
§ 9, Сл 1 предл. 4	§ 3, Сл 1 предл. 10
§ 9, Сл 2 предл. 4	§ 3, Сл. 2 предл. 10
§ 9. Опр. 3	§ 5, Опр. 2
§ 9, Предл 5	§ 5, Предл. 5
§ 9, Сл. предл. 5	§ 7, — 11
§ 9, Предл. 6	§ 5, — 4
§ 9, Опр. 4	§ 5. Опр. 2
§ 9 Предл 7	§ 5, Предл. 10
§ 9, — 8	§ 5, — 4

2-е издание	3-е издание
Глава I	
§ 9, Предл. 9	§ 5, Сл. предл. 8
§ 9, Теор. 2	§ 8, Предл. 8
§ 9, Предл. 10	§ 8, — 9
§ 9, Сл. предл. 10	§ 8, — 10
§ 9, Предл. 11	§ 8, — 15
§ 9, Упр 1	§ 2, Упр. 9
§ 9, — 2а	§ 5, — 2
§ 9, — 2б	§ 3, — 12
§ 9, — 3а	§ 3, — 13
§ 9, Упр. 3б и 3в	§ 5, — 5
§ 9, — 4	§ 3, — 14
§ 9, — 5	§ 3, — 15
§ 9, — 6	§ 8, — 8
§ 9, — 7	§ 5, — 3 и § 8, Упр. 9
§ 9, — 8	Опущено
§ 9, — 9	§ 5, Упр. 3
§ 9, — 10	§ 8, — 10
§ 9, — 11	§ 5, — 6
§ 9, — 12	Опущено
§ 9, — 13	§ 4, Упр. 8
§ 9, — 14	§ 5, Предл. 6 и 7
§ 9, — 15	§ 8, — 14
§ 10, Опр. 1	§ 9, Опр. 1
§ 10, Теор 1	§ 9, Теор. 1
§ 10, Сл. теор. 1	§ 9 Сл. теор. 1
§ 10, Предл. 1	§ 9, Предл. 1
§ 10, Сл. предл. 1	§ 9, Сл. предл. 1
§ 10, Предл. 2	§ 9, Предл. 2
§ 10, Опр. 2	§ 9, Опр. 2
§ 10, Предл. 3	Опущено
§ 10, — 4	§ 9, Предл. 4
§ 10, — 5	§ 9, — 3
§ 10, Опр. 3	§ 9, Опр. 3 и предл. 6
§ 10, Предл. 6	§ 9, Предл. 7
§ 10, — 7	§ 9, — 5
§ 10, Теор. 2	§ 9, Теор. 2
§ 10, Сл 1 теор. 2	§ 9, Сл. 1 теор. 2
§ 10, Сл. 2 теор. 2	§ 9, Сл. 2 теор. 2
§ 10, Теор. 3	§ 9, Теор. 3
§ 10, Сл. теор. 3	§ 9, Сл. теор. 3
§ 10, Предл. 8	§ 10, Предл. 8
§ 10, Сл 1 предл. 8	§ 9, Сл. 4 теор. 2
§ 10, Сл. 2 предл. 8	§ 9, Сл. 4 теор. 2
§ 10, Опр 4	§ 9, Опр. 4
§ 10, Предл. 9	§ 9, Предл. 9
§ 10, Сл предл. 9	§ 9, Сл. предл. 9
§ 10, Предл 10	§ 9, Предл. 10
§ 10, — 11	§ 9, — 11
§ 10, — 12	§ 9, — 12

2-е издание	3-е издание
Глава I	
§ 10, Предл. 13	§ 9, Предл. 13
§ 10, — 14	§ 9, — 14
§ 10, Теор. 4	§ 9, Теор. 4
§ 10, Опр. 5	§ 10, Предл. 7
§ 10, Предл. 15	§ 10, Сл. предл 7
§ 10, — 16	§ 10, Предл. 1
§ 10, — 17	§ 10, — 9
§ 10, — 18	§ 10, Сл. 4 предл. 5
§ 10, Опр. 6	§ 9, Опр. 5
§ 10, Предл. 19	§ 9, Предл. 15
§ 10, Сл. предл. 19	§ 9, Сл. 2 предл. 15
§ 10, Опр. 7	Теор множ., гл. II, § 4, Опр. 5
§ 10, — 8	§ 1, Опр. 8
§ 10, — 9	§ 9, — 6
§ 10, Теор. 5	§ 9, Теор. 5
§ 10, Предл. 20	§ 9, Сл. теор 5
§ 10, Упр. 1	§ 9, Упр 23
§ 10, — 2	Опущено
§ 10, — 3а	§ 10, Сл. 5 теор. 1
§ 10, — 3б и 3в	§ 10, Упр. 11
§ 10, — 4	§ 10, — 12
§ 10, — 5	§ 10, — 10 и 13
§ 10, — 6	§ 9, — 3
§ 10, — 7	§ 9, — 5
§ 10, — 8	§ 3, — 7
§ 10, — 9	Опущено
§ 10, — 10	§ 9, Упр. 19
§ 10, — 11	§ 9, — 20
§ 10, — 12	§ 9, — 2
§ 10, — 13	§ 8, — 7
§ 10, — 14а	§ 10, — 16
§ 10, — 14б	§ 10, Предл. 10
§ 10, — 14в	§ 10, Упр. 17
§ 10, — 15	§ 10, — 19
§ 10, — 16	§ 10, — 18
§ 10, — 17	§ 10, Предл. 10
§ 10, — 18	§ 10, Сл. предл. 9
§ 10, — 19	§ 10, Теор. 1 и предл. 9
§ 10, — 20	§ 10, Предл. 3
§ 10, — 21а	§ 9, Предл. 16
§ 10, — 21б и 21в	§ 9, Упр. 11
§ 10, — 21г	§ 9, Предл. 17
§ 10, — 22	§ 9, Упр. 12
§ 10, — 23а	§ 9, Теор. 1, 2, 3 и Упр. 5в
§ 10, — 23б	§ 9, Предл. 3
§ 10, — 23в	§ 9, Упр. 5
§ 10, — 23г	§ 9, — 10
§ 10, — 24	§ 9, — 24в

2-е издание	3-е издание
Глава I	
§ 11	
Предл. 6	Предл. 8
— 7	— 6
— 8	— 7
— 12	— 13
— 13	— 12
Упр. 1	Опущено
— 3	Упр. 10
— 4	— 3а
— 5	— 3б
— 6	— 4
— 7	§ 10, Упр 20 и § 11, Упр. 9
— 8	Опущено
— 9	Опущено
— 10	Упр. 15
— 11	— 13
— 12	— 17
— 13	Гл. IV, 3-е изд., § 2, Упр. 14
— 14	Упр. 11
Глава II	
§ 1, Опр. 2	§ 1, п° 2
§ 1, — 3	§ 1, Опр. 2
§ 1, — 4	§ 2, — 2
§ 1, Предл. 1	§ 2, Предл. 4
§ 1, Опр. 5	§ 2, Опр. 3
§ 1, Упр. 1	§ 2, п° 2, Замеч. 1
§ 1, — 2	§ 1, Упр. 1
§ 1, — 3	Опущено
§ 1, — 4	§ 2, Упр. 4
§ 2, Опр. 1	§ 1, Опр. 3
§ 2, Предл. 1	§ 1, Предл. 3
§ 2, Опр. 2	§ 2, Опр. 1
§ 2, Предл. 2	§ 2, Предл. 1
§ 2, — 3	§ 2, — 2
§ 2, — 4	§ 2, — 3
§ 2, Упр. 1	§ 2, Упр. 2
§ 2, — 2	§ 1, — 1
§ 2, — 3	§ 1, — 2
§ 2, — 4	§ 1, — 3
§ 2, — 5	Опущено
§ 2, — 6	§ 2, Упр. 1
§ 2, — 7	§ 1, — 5
§ 3	
Опр. 2	Опущено
— 3	Опр. 2
— 4	— 3
Предл. 3	Предл. 6
— 4	Сл. 2 предл. 5

2-е издание	3-е издание
Глава II	
Сл. предл. 4	Сл. 3 предл. 5
Предл 5	Предл. 3
— 6	— 8
— 7	— 9
— 8	— 11
Теор 1	Теор 2
— 2	— 3
Предл. 9	Сл теор. 2
Сл. предл. 9	Предл. 14
Предл. 10	§ 2, Предл 6
Упр. 1а и 1б	Предл. 7 и сл.
Упр. 1в	Упр. 1
— 3	Опущено
— 4	§ 4, Упр 12б
— 5	Опущено
§ 4	
Теор. 3	Сл. теор. 3
— 4	Теор 3
Предл. 1	Предл. 4
Сл. предл. 1	Сл. предл. 4
Предл. 2	Предл 5
— 3	— 6
Сл. предл. 3	Сл. предл. 6
Предл. 4	Предл. 7
Упр. 2	Упр. 5
— 4	— 11а
— 5	Гл. I, § 9, Упр. 14 и гл. II, § 4, Упр. 11в
— 6	Упр. 7а
— 7	— 7г
— 8	Предл. 2 и Упр. 7б
— 9	Упр. 8
— 10	— 9
— 11	— 10
— 12	— 4
— 13	— 12
— 21	Гл I, § 11, Упр. 20
— 22	Упр. 21
— 23	Сл. предл 6
§ 5, Опр. 1	§ 2, Опр 4
§ 5, Предл. 1	§ 2, Предл. 7
§ 5, Предл. 2	§ 2, Предл. 9
§ 5, — 3	§ 3, Сл. 2 предл. 4
§ 5, — 4	§ 3. Предл. 10
§ 5, Сл. предл. 4	§ 3, Сл. 2 предл. 18
§ 5, Предл. 5	§ 4 Предл. 3
§ 5, Упр. 1	§ 2, — 5
§ 5, — 2	§ 2, — 5
§ 5, — 3	§ 2, Упр. 5

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АКСИОМЫ ГЛАВЫ I

Аксиомы открытых множеств:

(O_I) Всякое объединение открытых множеств есть открытое множество.

(O_{II}) Пересечение любого конечного семейства открытых множеств есть открытое множество.

Определение замкнутых множеств:

Замкнутое множество есть дополнение открытого множества.

Аксиомы замкнутых множеств

(O'_I) Всякое пересечение замкнутых множеств есть замкнутое множество.

(O'_{II}) Объединение любого конечного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Определение окрестностей с помощью открытых множеств:

Множество V есть окрестность точки x, если оно содержит открытое множество, которому принадлежит x.

Аксиомы окрестностей:

(V_I) Всякое множество, содержащее окрестность точки x, есть окрестность точки x.

(V_{II}) Пересечение любого конечного семейства окрестностей точки x есть окрестность точки x.

(V_{III}) Всякая окрестность точки x содержит x.

(V_{IV}) Всякая окрестность V точки x содержит такую окрестность W этой точки, что V является окрестностью каждой точки из W.

Определение открытых множеств с помощью окрестностей:

Множество открыто, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Определение внутренней точки и точки прикосновения множества

Точка x является внутренней для множества A, если A есть ее окрестность.

x есть точка прикосновения множества A, если любая ее окрестность пересекается с A.

Аксиомы фильтров:

(F_I) Всякое множество, содержащее какое-либо из множеств фильтра, принадлежит фильтру.

(F_{II}) Пересечение любого конечного семейства множеств фильтра принадлежит фильтру.

(F_{III}) Ни одно из множеств фильтра не пусто.

Аксиомы базисов фильтра:

(B_I) Пересечение двух множеств базиса фильтра содержит множество этого базиса.

(B_{II}) Базис фильтра не пуст; ни одно из множеств базиса фильтра не пусто.

Определения предела и точки прикосновения базиса фильтра:

Точка x есть предел базиса фильтра, если всякая ее окрестность содержит множество этого базиса.

x есть точка прикосновения базиса фильтра, если x является точкой прикосновения всякого множества из этого базиса.

Аксиома отделимых пространств:

(H) Каковы бы ни были две различные точки x, y, существуют окрестность x и окрестность y, не имеющие общих точек.

Определение регулярных пространств:

Пространство регулярно, если оно отделимо и, кроме того, удовлетворяет следующей аксиоме:

(O_{III}) Всякая окрестность произвольной точки содержит замкнутую окрестность этой точки.

Определение компактных пространств:

Пространство квазикомпактно, если оно удовлетворяет какой-либо из следующих четырех эквивалентных аксиом:

(C) Всякий фильтр имеет по крайней мере одну точку прикосновения.

(C′) Всякий ультрафильтр сходится.

(C″) Всякое семейство замкнутых множеств, пересечение которого пусто, содержит конечное подсемейство, пересечение которого пусто.

(C‴) Всякое открытое покрытие пространства содержит конечное покрытие этого пространства.

Пространство компактно, если оно отделимо и квазикомпактно.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АКСИОМЫ ГЛАВЫ II

Аксиомы окружений для X:

Множество окружений для X есть множество подмножеств произведения $X \times X$, удовлетворяющее аксиомам (F_I), (F_{II}) и, кроме того, следующим аксиомам:

(U_I) Всякое окружение содержит диагональ произведения $X \times X$.

(U_{II}) Если V — окружение, то и V^{-1} — окружение.

(U_{III}) Каково бы ни было окружение V, существует такое окружение W, что $W^2 \subset V$.

Определение и аксиомы фундаментальных систем окружений для X:

Фундаментальная система окружений для X есть множество подмножеств произведения $X \times X$, удовлетворяющее аксиоме (B_I) и следующим условиям:

(U'_I) Всякое окружение из системы содержит диагональ.

(U'_{II}) Каково бы ни было окружение V из системы, в ней существует такое окружение V', что $V' \subset V^{-1}$.

(U'_{III}) Каково бы ни было окружение V из системы, в ней существует такое окружение W, что $W^2 \subset V$.

Определение фильтров Коши:

Фильтр $\mathfrak{F}$ в равномерном пространстве X называется фильтром Коши, если для любого окружения V существует множество $A \in \mathfrak{F}$, любые две точки которого близки порядка V.

Определение полных пространств:

Полное пространство есть равномерное пространство, в котором всякий фильтр Коши сходится.